
3 1761 04493 8728

L'ESPACE

15 c

Les Modalités universelles de la Quantité :



L'ESPACE

PAR

F. WARRAIN



PARIS
LIBRAIRIE FISCHBACHER
33, rue de Seine, 33

—

1907

TABLE DES MATIÈRES

Les modalités universelles de la Quantité

I. L'ESPACE

Pages.

La Synthèse de la Quantité

LA PANGÉOMÉTRIE

SECTION I

Les Géométries non euclidiennes

SECTION II

La Géométrie à N dimensions

SECTION III

Les formes régulières dans les N dimensions

SECTION IV

Les relations spatiales

FIGURES & TABLEAUX HORS TEXTE

BIBLIOGRAPHIE

Calinon . . . . . *Les espaces géométriques.* (Revue philosophique, oct. 1891.)

Poincaré . . . . . *La Science et l'Hypothèse.*

— *La valeur de la Science.*

Lobatschewsky. . *Géométrie imaginaire* (1835-1838).

— *Pangéométrie* (1855).

Bolyai. . . . . . *Science absolue de l'espace* (1832).

Mansion . . . . . *Métagéométrie.*

Barbarin. . . . . *La géométrie non euclidienne.* (Collection. Scientia, 1902.)

— *Etudes de géométrie analytique non euclidienne.* (Mémoire de l'Académie royale de Belgique, 1900.)

Delbeuf . . . . . *L'ancienne et les nouvelles géométries.* (Revue philosophique, avril 1894.)

J. Bonnel . . . . *Les atomes et les hypothèses dans la géométrie* (1899).

Georges Léchalas. *Etude sur l'Espace et le Temps* (1896).

Maurice Boucher . *Essai sur l'Hyperespace, le Temps, la Matière et l'Energie* (1903).

Schoute . . . . . *Mehr dimensionale geometrie.*

Jouffret. . . . . *Traité élémentaire de géométrie à 4 dimensions.*

— *Mélanges de géométrie à 4 dimensions.*

STRINGHAM . . . . *Regular figures in* n *dimensional space.* (Journal of Mathematics, vol. III.)

CÉSARO. . . . . . *Forme poliedriche regolari e semi-regolari in tuti gli spazi* (1885).

RICHARD . . . . . *Leçons sur les méthodes en géométrie moderne.*

DUPORC. . . . . . *Les premiers principes de géométrie moderne.*

ROUCHÉ ET COMBEROUSSE. . *Traité de géométrie.*

L. LAURENT. . . . *Géométrie analytique générale*

Ch. HENRY . . . . *Le cercle chromatique.*

— *Le rapporteur esthétique.*

Expression de la Vie dans l'Espace et le Temps

La Vie, telle que nous la connaissons, se développe à travers l'Espace et le Temps en Quantité et en Qualité. Or les mathématiques tendent à exprimer toutes ces conditions en quantités. Elles quantifient l'Espace par la Grandeur continue et le Temps par le Nombre discontinu; elles ramènent la Qualité le plus possible à des groupes de nombres ou de grandeurs, mais en échange la quantité se revêt en elles de qualités. Elles réduisent la continuité des grandeurs spatiales en discontinuités numériques par la mesure ; et elles transforment la discontinuité des nombres successifs en continuités géométriques. Enfin, elles expriment la synthèse de l'espace et du temps sur laquelle repose la vie et le mouvement par des intensités et par des vitesses, intensités qui compactent l'espace en déterminations individuelles quantitatives ; vitesses qui unifient le temps en l'amenant à se transformer en une certaine quantité d'espace.

Ainsi, il y aura lieu de chercher l'expression des fonctions de la vie dans les fonctions algorithmiques, géométriques et mécaniques.

Cette traduction des lois de la vie par le symbolisme mathématique a pour but, en établissant un rapport de correspondance entre deux ordres de concepts abstraits,

de mettre mieux en évidence leurs diverses relations, d'élargir le point d'appui des opérations de la pensée, enfin de suggérer une compréhension plus vive et plus esthétique en faisant participer à une même idée ses manifestations irradiées dans nos divers modes de perception.

Sans doute, ce procédé d'investigation présente un écueil : celui de substituer inconsciemment le symbole à l'objet qu'il traduit imparfaitement et d'attribuer à l'objet ce qui n'appartient qu'au symbole. Mais cet inconvénient n'existe pas moins quand on raisonne uniquement sur des termes abstraits strictement définis ; car toute définition stricte s'écarte forcément de la réalité qui ne peut être abstraite. En réunissant divers symboles d'ordres différents (les définitions logiques, les formules algorithmiques, les figures géométriques, les évocations mécaniques et peut être encore la représentation d'une espèce biologique), on peut au contraire former une synthèse esthétique où l'analogie jouera le rôle d'un stimulant et fera entrevoir une foule de relations insoupçonnées, et aptes à fournir des déductions éminemment rationnelles.

Ainsi, le travail qui va suivre devra être envisagé à peu près comme celui des statistiques graphiques usitées en physique, en psychologie, en économie sociale. Mais il s'en distingue cependant. Car, dans les statistiques des sciences expérimentales, on choisit arbitrairement un mode de représentation graphique des quantités de diverse nature ; les faits sont exprimés par des points situés, puis on cherche à induire la loi générale et les propriétés de la courbe qui lui correspondent.

*Ici nous avons procédé en sens inverse. Cherchant à découvrir la correspondance métaphysique des principaux algorithmes et des figures géométriques d'après leurs pro_*

priétés mathématiques, nous avons poursuivi l'analyse des fonctions métaphysiques en étudiant les propriétés des algorithmes et des figures correspondantes. Sans doute, ces rapprochements ne sont pas d'une sûreté absolue ; mais quand on constate sur un nombre de points assez nombreux une corrélation étroite, on est fondé à croire qu'elle n'est pas fortuite, et si l'exactitude de la représentation existe dans une certaine zone, on peut induire qu'elle se poursuit tant que la continuité persiste.

Ce procédé, très usité dans les raisonnements mathématiques, possède en particulier l'avantage de conduire l'examen des concepts jusqu'aux cas limites, de faire pressentir ce qu'ils deviennent pour les valeurs infimes ou nulles, positives ou négatives, réelles ou imaginaires etc.

Par là, les notions que nous sommes portés à considérer comme le summum de généralisation nous apparaissent comme les cas particuliers de possibilités beau coup plus générales, insoupçonnées et témérairement niées par certains savants. Cet avantage, à lui seul, suffirait pour justifier la méthode en dépit de la part de convention inévitable qui entache les rapprochements établis, bien que les corrélations adoptées ici nous aient paru s'imposer d'elles-mêmes.

Il est hors de doute qu'il existe une corrélation réelle entre les fonctions métaphysiques et mathématiques, et l'imperfection des tentatives pour la découvrir ne doit pas faire condamner ce genre de recherches. Ce n'est que par une série de perfectionnements successifs, qui seront provoqués par les erreurs mêmes des essais précédents, que l'on parviendra à s'approcher de plus en plus de la vérité. Les théories vertébrales de Gœthe et d'Oken étaient les

premiers pas nécessaires de l'anatomie comparée ; et, si les schémas de ces maîtres sont reconnus défectueux, leur plan général subsiste et la voie qu'ils ont frayée paraît être la bonne. Du reste, le grief qu'on pourrait adresser à ces tentatives métaphysiques retomberait également sur la physique mathématique, la chimie moléculaire, la psychométrie, etc., qui ne peuvent ramener leurs observations à des éléments mathématiques qu'à la condition d'adopter des unités de mesures et des corrélations quantitatives arbitraires entre éléments de qualités hétérogènes, jusqu'au moment où les corrélations découvertes élimineront, par des transformations progressives, ce qu'il y a d'arbitraire, et atteindront enfin l'unité vraie qui sert de base aux différenciations qualitatives.



LA SYNTHÈSE DE LA QUANTITÉ

Nature et modes de la Quantité

Le schéma de la Réalité établi par Wronski n'est autre chose que la détermination de la Vie dans sa conception la plus générale ; c'est la formule de la synthèse concrète. Nous avons vu, d'autre part, que cette synthèse est constituée d'un élément ordonnateur, actif, spirituel, répondant au pôle du savoir, et d'un élément indéterminé passif et matériel répondant au pôle de l'être. Or l'ordre a pour terme l'unité synthétique ; la manière dont l'ordre opère définit l'Essence, et l'unité résultant de l'ordre exprime cette Essence. Sous l'influence de l'ordre, l'indétermination est définie ; mais, tant que l'ordre parfait n'est pas établi, l'élément passif reste incomplètement déterminé. Or le résidu non pénétré par l'essence n'en n'a pas moins été séparé de ce qui a reçu une qualification ; ce résidu a donc subi une distribution, une délimitation ; il constitue donc la limite de la manifestation de l'essence dans la passivité, c'est-à-dire de la Qualité ; et ce caractère de limitation commun à tout ce qui est inqualifié, est une sorte de qualité négative : la Quantité. Ainsi, la Quantité est le

caractère primitif que revêt la passivité matérielle et indéterminée, sous l'influence de l'activité spirituelle et idéale.

Il résulte de cela que la Qualité enserre l'indétermination non encore pénétrée, et sa limitation constitue une Forme. La Forme est la frontière commune à la Qualité et à la Quantité. C'est elle qui détermine et sépare les individualités. Or l'unité inhérente à toute qualification,envisagée dans chacune de ces circonscriptions, est ce qui établit chaque individualité; elle se nomme alors Substance, si on considère son état, Force si on considère son action. On voit que le résidu indéterminé contraint l'acte à se diviser, et ainsi, dans la matière, se réalise la pluralité qui est le fondement du Nombre. D'autre part, la Quantité, considérée comme définie simplement par ce qui demeure inqualifié, est ce qu'on nomme Grandeur. Enfin la comparaison de ce qui est qualifié avec ce qui demeure inqualifié consiste en une prédominance relative de la Qualité ou de la Quantité, de l'activité ou de la résistance, et c'est, dans sa résultante indistincte et primitive, ce qui constitue l'Intensité. Intensité, Grandeur et Nombre sont les trois modes de la Quantité. Et nous voyons que la Quantité résulte du premier contact de l'activité spirituelle et de la passivité matérielle, et qu'elle repose sur la multiplication divisionnelle de l'Un-Tout, qui revêt alors ce mode d'existence que nous nommons Individualité.

L'individualité définit l'unité abstraite, base de la Quantité. Zéro et l'infini correspondent à l'évanouissement de la Quantité : zéro à la potentialité virtuelle, active, l'infini à la potentialité virtuelle passive : zéro à

l'insaisissable source de l'acte, l'infini à l'universalité qualitative de l'Essence.

La production de la Quantité et de la Qualité (et par conséquent de la forme) sont donc les deux faces corrélatives de la pénétration réciproque de l'esprit et de la matière. Et comme cette pénétration tend vers l'établissement de la vie, la matière évolue de la quantité vers la qualité. Cependant tout ordre en se perfectionnant détruit des ordres provisoires et relatifs, et aussi l'évolution du kosmos présente certaines séries regressives de la qualité vers la quantité : c'est ce qui correspond à l'entropie de l'univers. Les physiciens, étudiant la matière principalement au point de vue de la quantité et éliminant de leurs observations justement ce qui s'en dégage pour se spiritualiser, ont considéré cette entropie du monde physique marchant vers la dissolution comme le fait principal de l'évolution. Ils s'étonnent qu'en dépit des formules, la réversibilité des phénomènes ne puisse se produire. C'est probablement parce que cette entropie ne résulte que de la réaction d'un mouvement inverse constructif s'opérant en dehors du domaine dit inorganique, et s'élevant vers les régions psychiques et spirituelles. Dans ce domaine, la quantité ne subsiste dans la qualité qu'en se transformant en Valeur. La Valeur est l'élément quantitatif dématérialisé; c'est la réalisation de l'impulsion du bien qui a établi la vérité par l'ordre. La beauté est la réalisation de l'idée directrice de l'ordre, l'épanouissement de la vérité grâce à laquelle le bien se produit. Et ainsi l'œuvre de la Vie réalise une opération esthétique où l'unité synthétique s'établit au sein d'une pluralité homogène, qu'elle diversifie pour solidariser les éléments et évanouir

la Quantité dans la Qualité. Mais elle réalise aussi une opération préparatoire consistant à établir une distribution quantitative au sein du désordre et de l'indétermination chaotique.

***

Dans la Vie absolue parfaite, la synthèse explicite d'ici-bas se ramène à une identification de son principe propre avec tous ses éléments : identification dont les manifestations sublimes de la vie en ce monde sensible nous donnent une lointaine idée. Mais dans la sphère de la relativité, l'existence individuelle est soumise à la quantité. La Quantité restitue à la Qualité répartie entre les individus l'universalité de l'essence, mais en même temps elle établit les séparations entre individus, sans lesquelles toutes relation s'évanouirait dans la confusion, tant que l'ordre n'est pas parfait.

Le kosmos se manifeste dans son ensemble comme établi sur l'Energie, le Temps et l'Espace. Ce sont là les composantes mêmes de la Vibration-Pensée, qui est l'acte vital de l'univers : l'énergie constitue l'impulsion motrice de cet axe ; le Temps en est l'axe directeur, et l'Espèce en définit l'expansion. L'energie à laquelle correspond l'Intensité est cette projection du désir, où l'opposition qualitative élémentaire de l'activité et de la passivité se confond en une seule réalité, sous forme du plus et du moins, distinction d'où résulte une direction. Et ainsi le désir-énergie est à la fois la source de la Quantité qui va se développer et de la Qualité qui permettra le concours téléologique de ce développement, et sera, sous forme de Valeur, l'identité finale de la Quantité et de la Qualité.

L'Intensité est l'identification par confusion des individualités d'un moi et d'un non-moi ; elle règne dans la sphère émotive, où nous ne discernons qu'à travers un voile épais la Qualité des choses en même temps que la Quantité y apparaît vague et comme activité ou passivité dominante Et nous trouvons dans cette opposition la racine du caractère qualitatif qui s'impose dans toute généralisation mathématique.

***

Si nous considérons l'Intensité pure, abstraction faite du germe qualitatif impliqué dans l'opposition qu'elle contient et projeté en direction résultante, elle constitue vis-à-vis de la quantité l'élément fondamental ou neutre d'une réalité qui a pour élément être la Grandeur, et pour élément savoir le Nombre (1). Car la Grandeur est l'aspect particulièrement passif de la Quantité, ce qui n'a pas été ordonné, la Quantité où l'action intelligible ne se manifeste que par la forme qui la délimite. La Grandeur est donc continue, c'est-à-dire que la Quantité y demeure sous une forme d'Intensité passive, où rien ne vient établir de distinction. — Le Nombre est au contraire l'aspect particulièrement actif, distributif dans la Quan-

---

(1) Le schéma qui suit est développé suivant les principes de Wronski, mais ne se trouve pas dans les œuvres de Wronski : nous donnerons plus loin à titre de renseignements quelques-uns des schémas dressés par Wronski relativement aux objets que nous traitons, mais ils diffèrent sensiblement de celui-ci parce que les points de vue envisagés ne sont pas identiques.

tité, où l'Intensité se présente comme répétition d'acte ; il est essentiellement discontinu.

Or l'Intensité, appliquée pleinement à la Grandeur ou au Nombre pour les développer en éléments universels réalise l'Espace et le Temps ; et nous voyons là le domaine de deux des branches fondamentales des mathématiques : la géométrie et l'algorithmie (1).

Mais de la Grandeur et du Nombre dérivent deux éléments transitifs : la Grandeur remplit fonction discontinue du Nombre en devenant Mesure (distance) ; le nombre remplit la fonction continue de la Grandeur en devenant Durée (intervalle). La géométrie devient métrique et l'algorithmie s'applique à l'étendue.

Dans la partie systématique de ce système, le Temps parcourant l'Espace représente l'S en E, c'est la Vitesse : de là la Cinématique, géométrie du mouvement ; l'Espace agissant sur le Temps représente l'E en S, c'est la Périodicité : de là la Statique, qui étudie la stabilité résultant du mouvement lui-même ; Temps et Espace s'identifient en un concours final sous l'influence téléologique imprimée par l'intensité dirigée: c'est le Mouvement, objet de la Dynamique. En effet le Mouvement unifie l'Espace, et répartit le Temps dans l'Espace; en outre, il développe une énergie et révèle un but. L'essence de la force apparaît donc ici comme une identification de cette opposition polaire de toute existence

---

(1) Wronski nomme Algorithmie, la science des Nombres dans toute sa généralité, comprenant l'Arithmétique et l'Analyse. Ce nom est tombé en désuétude, mais nous le conserverons, car aucune dénomination plausible ne l'a remplacé.

individuelle, étendue et durée concourant vers une fin commune sous l'influence d'un désir. Et ce concours décèle l'origine obscure de l'Intensité, source de la Grandeur et du Nombre.

Enfin, la parité coronale du système de la quantité doit nous représenter, en une Quantité à la fois intense, étendue et temporelle, la Qualité épanouie du germe de l'énergie dirigée ; c'est le Corps Vivant, terme de l'évolution de la quantité, objet où la matière est revêtue de l'esprit par la Forme : c'est l'objet de l'Esthétique, et l'Art apparaît ainsi comme étant le couronnement des mathématiques.

Nature du Temps et de l'Espace

Aux trois modes de la quantité : Intensité, Grandeur et Nombre, qui sont les trois modes de la manifestation de l'existence individuelle, correspondent trois relations qui permettent aux individualités de demeurer distinctes ; ce sont : la Force-Résistance, l'Espace et le Temps. (1) Ces trois entités sont donc, si l'on veut, des formes subjectives de la pensée et de l'existence relative, qui consiste dans l'opposition et la liaison d'un moi et d'un non-moi, d'un sujet et d'un objet ; mais ce sont en même temps les conditions de l'existence individuelle, et l'individualité ne subsiste que par rapport à elles.

Ainsi, l'individualité et ces trois entités s'impliquent réciproquement.

---

(1) Le Temps correspond au nombre ordinal. Nous verrons ailleurs que le nombre cardinal en doit être distingué.

Force-Résistance, Temps, Espace peuvent être à bon droit considérés soit comme de simples formes subjectives, soit comme des réalités objectives, suivant l'ordre des individualités considérées; car toute existence individuelle baigne dans un milieu dynamique, spatial et temporel, et elle crée à son tour en elle-même un milieu analogue.

Ainsi se résout, il me semble, cette controverse qui, depuis Kant, a tant agité la philosophie. Le double aspect de ces entités nous permettra d'éclaircir, je l'espère, bien des problèmes. Nos conceptions de la Force, de l'Espace et du Temps sont évidemment relatives aux conditions spéciales de notre conscience et de de notre existence : mais ces modes spéciaux qui nous sont propres ont une valeur absolue en tant que symboles des modes universels qui constituent l'essence de ces entités.

La Force-Résistance, l'Espace et le Temps ont donc bien une existence propre, mais leurs modes de manifestations sont relatifs aux êtres divers qui, par leur individualité, sont conditionnés par ces entités et les conditionnent à leur tour. Et,comme la raison nous permet de concevoir sous forme d'orientation, de limite, la nature absolue des choses, elle nous fournit en même temps la faculté d'imaginer des modes étrangers à notre propre milieu vital sous forme irreprésentable, et nous permet ainsi d'étudier des temps et des espaces qui s'appliquent peut-être à d'autres êtres, ou qui sont à l'état de simple possibilité. Cela indique immédiatement la valeur précieuse de la pangéométrie, et montre qu'il y aurait également à généraliser la notion des modes d'existence temporelle, question peu étudiée jusqu'ici.

***

Balmès a montré que le Temps et l'Espace sont des manifestations du principe de contradiction, qui est pour ainsi dire la base de l'existence relative et individuelle.

Nous acquerrons la perception d'objets individuels en constatant, dans la représentation, la fixité de certaines données se trouvant en relations variables avec d'autres ; cette variation implique la succession, et la séparation qu'elle indique au sein de la représentation globale implique la simultanéité. A la variation des relations correspond une exclusion de fait entre certaines choses qui n'existent qu'en se substituant les unes aux autres. A la séparation qui est manifestée et qui est la base des relations entre les choses correspond une effectivité de coexistence entre objets individuels.

On peut dire, avec Balmès, que deux choses sont dans le Temps ou dans l'Espace l'une par rapport à l'autre, suivant que la manifestation de l'une exclut ou non de la même représentation la manifestation de l'autre. Mais, pour constater cette exclusion ou non-exclusion, il est nécessaire d'opposer dans le sujet pensant la condition opposée. A l'exclusion qui caractérise la relation de temps, il faut, pour avoir conscience de la disjonction des deux termes de cette relation, que la pensée oppose une conjonction de ces termes dans un domaine intérieur qui est la Mémoire. Et c'est ainsi que la Mémoire est un espace subjectif : ce que nous appelons Espace est sans doute la Mémoire cosmique. A la non-exclusion qui caractérise la relation d'espace, il faut, pour avoir

conscience de la conjonction des deux termes sans les confondre, que la pensée oppose une disjonction de ces termes dans un domaine intérieur, qui est la Conception. Et c'est ainsi que la Conception est un Temps subjectif; et ce que nous appelons Temps est sans doute la Conception cosmique.

Temps et Espace se distinguent donc en fonction de l'existence individuelle comme l'effectivité de non-coexistence ou de coexistence.

Inversement, vis-à-vis des formes, le Temps correspond à la possibilité, l'Espace à l'impossibilité d'une diversité de formes en un même individu.

Ainsi, Temps et Espace sont l'un et l'autre des exclusions d'existence, l'une par rapport à l'ensemble de la représentation au sein de laquelle s'isolent les individus, l'autre par rapport à la considération même des individus distincts.

Sous ces deux rapports, le Temps et l'Espace impliquent la Pluralité et la Grandeur : la Pluralité, en ce que toute relation n'existe qu'entre plusieurs termes; la grandeur, en ce que toute relation implique un contenant commun des objets. Mais la Grandeur ne s'applique que médiatement au Temps, et le Nombre ne s'applique que médiatement à l'Espace.

Considérés en eux-mêmes comme essence universelle dont dérivent les faits particuliers qui les manifestent, le Temps n'est autre chose que l'universalité du Nombre(1), et l'Espace l'universalité de la Grandeur.

---

(1) Il ne s'agit que du nombre ordinal.

Fonctions du Temps et de l'Espace

Or, nous l'avons vu, le Nombre résulte de la division de l'acte par la résistance matérielle, et la Grandeur, de ce qui demeure inqualifié dans la résistance matérielle. Le Temps, étant l'universalité du Nombre, est le moyen qui permet à l'individualité (opposée par sa nature à l'universalité) de recevoir l'universalité des formes : il réalise le développement de cette universalité au sein de l'exclusivisme individuel. L'Espace, étant l'universalité de la Grandeur, est le moyen par lequel l'existence individuelle peut, en conservant son exclusivisme, réaliser par sa collection l'universalité d'existence.

Temps et Espace sont les deux moyens d'emprise exercée par l'Esprit sur la matière pour établir l'ordre dans le chaos et le transformer en harmonie. Ils sont l'un et l'autre la modalité sous laquelle la Principiation et l'Activité s'appliquent à l'individualité, qui est l'appétition du chaos vers la Liberté.

La Principiation sous le mode successif du Temps devient la Causalité. Mais c'est à tort, à mon sens, que l'on a voulu réduire l'essence du Temps à celle de Causalité, car il existe des successions qui n'ont aucun lien causal. La Causalité s'introduit dans le Temps pour l'unifier et y définir une direction.

L'Activité, sous le mode étendu de l'Espace, devient le Mouvement. Le Mouvement réunit les séparations de l'Espace et y établit des orientations.

Ainsi, le Temps et l'Espace sont les premiers degrés d'ordre s'établissant au sein de l'indétermination sous

l'influence de la Principiation et de l'Activité, qui se transforment en pénétrant dans la matière. Le désir né de l'obstacle qui s'oppose à la volition prend conscience, par le Temps et par l'Espace, des tendances et des idées compactées dans la volition et des modalités qui permettront le progrès vers la fin.

Le Mouvement unifie l'Espace au moyen du Temps : la Principiation y devient Force, et, dans ce Temps intérieur qu'est la Conception, le Mouvement devient Jugement.

La Causalité synthétise le Temps au moyen d'un milieu qui embrasse à la fois la cause et l'effet. Dans le Temps, l'Activité devient Cause ; dans l'Espace objectif, elle se traduit par le Mouvement ; dans l'Espace subjectif ou Mémoire, elle devient Raisonnement.

La séparation établie par le Temps entre le Désir et la Réalisation est la condition préalable de la seriation progressive du mouvement qui élimine la douleur à mesure qu'elle s'établit.

La Séparation établie par l'Espace entre l'Appétition et l'Union développe les deux forces opposées : condensation et expansion, qui sont les sources de tout mouvement défini, et dont l'harmonie amène la paix et le bonheur.

Causalité et Mouvement sont le double aspect subjectif et objectif, qualitatif et quantitatif, de l'identification du Temps et de l'Espace.

***

On a souvent attribué au Temps l'irréversibilité, à l'Espace la réversibilité des relations. Il y a là, à mon

sens, une erreur. Toute réversibilité implique succession, et l'Espace n'est en lui-même ni réversible ni irréversible. Par contre, le Temps n'est irréversible que si on y introduit d'une manière plus ou moins implicite une notion de progrès et par conséquent de finalité. Mais il y a des phénomènes successifs réversibles, par exemple chanter une gamme en allant du grave à l'aigu ou vice versa. Si l'irréversibilité domine cependant dans les grands cycles de succession, c'est que l'évolution est dirigée vers une fin et que, partout où l'ordre s'établit, les mouvements reçoivent une orientation et une finalité définies. De là une irréversibilité croissant avec l'ordre.

La réversibilité demeure dans les phénomènes secondaires, qui sont encore des infiniment petits par rapport au degré de l'ordre actuel. L'Espace, étant le réservoir des énergies non encore utilisées, est ainsi le champ où domine la réversibilité; mais celle-ci en est éliminée dès que l'on introduit dans l'Espace une différenciation dynamique, autrement dit, une causalité : ainsi, la gravitation rend irréversibles les diverses directions centrifuges et centripètes, qui sont aussi intransformables l'une dans l'autre que le passé et le futur, dont la notion implique une finalité.

L'Espace (et la Mémoire, cet espace interne) conserve les formes. Il est constitué par l'acquis qui persiste à travers les renouvellements d'actions accomplies dans le Temps; car la répétition introduit à travers les substitutions qui en résultent une Intensité d'ordre croissant qui émane de la nature qualitative du Nombre : ainsi, le Temps destructeur ne renouvelle que partiellement son œuvre. Dans la mesure où l'œuvre est dirigée par une raison ordonnatrice, elle est efficace ; la part de

destruction tient à ce qui demeure de chaotique, de non assimilé dans l'ordre. Mais l'acquis constitue une permanence, une fixité qui, distinguée et séparée du milieu des renouvellements temporels, constitue l'Espace. L'Espace semble donc dériver du Temps. Il constitue un Capital d'activité.

Mais, à son tour, l'Espace tend à se convertir en Temps quand il met en œuvre cette activité capitalisée en vue d'une action mieux dirigée ; car la conservation opérée par l'Espace accroît l'ordre, et les énergies potentielles se trouvent ainsi devenir de véritables instruments, intensifiant l'efficacité des actes. On entrevoit déjà la nature et les relations des algorithmes mathématiques élémentaires : la sommation et la graduation. On voit aussi comment chaque individu, par des efforts stériles et des jeux sans résultat, établit, au sein du chaos appétitif, l'ordre mental et organique, et arrive à se créer des fixités de concepts et d'instruments, sorte d'espace établi dans sa sphère individuelle, qui lui serviront à réaliser un progrès.

Ce processus est commun aux domaines organique, psychique, social, et à bien d'autres..

Mais la finalité de tout désir étant la possession de son objet, implique la résolution du Temps et de l'Espace qui l'en séparent, tout en lui permettant de frayer des voies pour l'atteindre. Partout où une finalité est atteinte, Temps et Espace s'identifient dans l'acte vital pur, acte qui a pour propre fin la jouissance même d'agir, de compacter des tendances en volition efficace, en un mot de créer. Et l'activité réalisatrice présente en elle-même cette double essence, dont le Temps (action) et l'Espace (réalisation) sont les émanations dans la Matière.

Chaque être individuel vit tantôt sous le mode du Temps, tantôt sous le mode de l'Espace, et c'est en cela qu'on a pu considérer le Temps et l'Espace comme des formes subjectives.

L'individu condense l'Espace par le Temps, et fixe le Temps par l'Espace. Le résultat de cette œuvre est la quantité devenant concrète et qualifiée par la Vie. La mesure dans laquelle un individu est vivant est la mesure dans laquelle il participe à l'universel en se dépouillant de la quantité, non pour se dissoudre dans l'universelle indétermination, mais pour conserver une unité purement qualifiée et participant à l'universel déterminé : c'est la Personnalité.

C'est la possibilité de cette transformation réciproque du Temps et de l'Espace qui permet aux arts du temps, comme la musique, de suggérer des sensations de couleurs et de figures, et aux arts du dessin d'évoquer des sons, des mouvements, des successions. Le Temps et l'Espace étant la zone de transformation de la Quantité en Qualité, opèrent le passage de la sensibilité à la compréhension explicite ; ils sont le lien d'un double courant intellectuel en sens inverse, l'un quantifiant toute qualité : sciences mathématiques ; l'autre qualifiant toute quantité : productions esthétiques.

Toute vie est l'enveloppe d'un Temps et d'un Espace, et les individus ne sont plongés dans le Temps et l'Espace que dans la mesure où leur vie est bornée. Chaque Temps et chaque Espace sont l'œuvre d'une vie supérieure : c'est l'ordre établi dans la quantité, la distinction des formes et leur indépendance relative aux individualités. Cette vie supérieure, c'est le sujet permanent à travers ses états de conscience et indivi

sible à travers son corps. Qui ne reconnaît là le processus même des fonctions de la vie organique, différenciant les organes pour permettre la possibilité de plusieurs fonctions et, en même temps rendant la forme de l'organe persistante à travers les particules de matière qui se succèdent ? Je ne puis développer ici toutes les applications du principe sous peine de perdre de vue notre sujet. Mais on conçoit que Temps et Espace sont relatifs à un développement cosmique vital, l'acte de la Vie considéré dans ce qu'il a d'universel, analysé dans ses deux racines : son élément savoir et son élément être ; tandis que la Vie est cet acte vu dans ce qu'il a d'individuel, ou plutôt d'unité, de réalisation.

LA PANGÉOMÉTRIE

La pangéométrie se divise en deux branches principales : 1° les géométries qui se distinguent par un paramètre déterminé : ce sont les géométries non euclidiennes ; 2° les géométries qui se distinguent par le nombre des dimensions de l'espace auquel elles s'appliquent : ce sont les géométries à n dimensions.

Les géométries non enclidiennes s'attachent, au point de vue logique, à la forme de l'espace, à ce qui le définit en fonction de ce qu'il n'est pas ; les géométries à n dimensions s'attachent au point de vue transcendant, au contenu ou à l'essence de l'espace, à ce qui sert à édifier son développement, à ce qui le définit en fonction de sa propre structure.

A ces deux groupes de géométries, il faut ajouter la géométrie de l'espace discontinu, inventée par Hilbert. Celle-ci convertit l'essence même de l'espace en essence algorithmique. Son étude nécessite l'examen d'un certain nombre de questions préalables, et nous devrons la rejeter après l'examen de la continuité. Remarquons seulement qu'elle opère la transition inverse de celle que réalise l'analyse en introduisant la continuité dans

l'algorithmie. Nous toucherons là aux questions les plus profondes de la conversion réciproque du Nombre et de la Grandeur et de la transformation possible du Temps en Espace et vice versa.

SECTION I

LES GÉOMÉTRIES NON EUCLIDIENNES

CHAPITRE I

Conceptions de l'espace

La notion d'espace homogène

Nous avons défini la notion d'espace comme étant la condition de la compatibilité de plusieurs existences individuelles et de l'incompatibilité de plusieurs formes en un même individu. Or l'espace proprement dit correspondra pour nous au milieu qui réalisera cette double condition dans le maximum de généralité que nous puissions concevoir. Il sera donc en lui-même vidé de tous les objets afin de pouvoir recevoir partout n'importe lequel ; d'autre part, il n'apportera aucune influence tendant à caractériser une forme. Si donc nous posons dans un tel milieu n'importe quel objet affecté de n'importe quelle forme, nous considérerons que le fait de l'introduire dans ce milieu ne lui apporte aucune modification. Toute autre conception de l'espace impli-

que que le milieu considéré est doué d'une influence qui altère les objets qu'on y introduit : il ne faudrait donc pas appeler du même nom le milieu neutre de toute influence dynamique et les divers milieux caractérisés par des influences spéciales.

On peut se demander s'il existe en réalité un tel milieu absolument passif quand on y introduit les objets, et l'on peut en douter ; car, tout objet matériel apportant avec lui une forme étendue, cette forme est soumise à certaines lois et déterminée, au moins en partie, par des influences étrangères à la volition propre ou aux tendances de l'objet individuel, s'il en est doué. Etant donné qu'un objet individuel ne peut pas créer et modifier sa propre forme en toute liberté, il faut attribuer cette forme, au moins partiellement, à des lois étrangères qui rendent son existence compatible avec le milieu où il est placé. Ainsi, il est extrêmement probable que tout espace est dynamique pour tout être matériel, autrement dit pour tout être passif et déterminé par des principes extrinsèques. L'ensemble des conditions imposées à un sujet pour rendre son existence compatible avec d'autres individus avec lesquels il est mis en rapport constitue un milieu.

Mais, parmi tous les milieux et entre toutes les influences possibles qu'une intelligence peut concevoir et qu'une sensibilité peut percevoir, il s'établit une classification spécifique, une échelle de quantité ; et, par rapport à un être percevant et intelligent, il existe entre les influences extrêmes un état où les tendances opposées s'équilibrent et se neutralisent, un degré d'intensité qui semble nul, en sorte que, soumis à ce degré et à cette sorte d'influence, les objets semblent n'être

en rien affectés et ne tenir leur forme et leur étendue que de leur propre nature. En un mot, le milieu où ils se trouvent semble alors purement passif, et les propriétés de forme et d'étendue qui s'y distinguent dans les objets semblent ne relever que des objets eux-mêmes.

C'est à un tel milieu que correspond la notion vulgaire d'espace, notion qu'on n'aurait jamais dû confondre avec la notion générique de l'ensemble des milieux doués d'influences, car ces deux notions ont l'une et l'autre un caractère parfaitement distinct.

On peut passer de la première de ces notions à la seconde, en attribuant au milieu une influence déterminée. Alors tous les objets apportés d'un premier milieu jugé neutre dans ce dernier milieu se trouvent altérés. Il se peut que les mêmes formes se retrouvent, mais alors elles ont été transposées d'un objet à un autre par l'influence du milieu. C'est ainsi qu'une ligne droite dans le premier milieu pourra devenir convexe dans le deuxième, en même temps qu'une courbe d'une certaine concavité dans le premier milieu sera devenue droite dans le deuxième. On pourra donc retrouver dans le deuxième milieu, comme formes dérivées, des formes qui, dans le premier milieu, étaient considérées comme formes primitives. Deux milieux d'influences opposées par rapport au milieu neutre pourront invertir certains caractères des figures, par exemple substituer la convexité à la concavité , et réciproquement.

Le milieu qui sera neutre pour un être doué de perception sera le milieu auquel il est adapté complètement, celui qui, ne lui offrant aucune résistance, ne lui laisse percevoir aucune influence. Il est bien alors le

réceptacle indifférent dans lequel tout caractère, qui le frappera comme un choc éveillant la perception, sera attribué à un objet ou à une force spéciale. Quant à ce qui, dans les influences, est permanent et partout invariable dans l'étendue et la durée de sa connaissance, il n'en pourra avoir qu'une notion métaphysique, définie par un rapport entre des termes (par exemple, comme nous l'avons fait par la condition de compatibilité de certains modes d'existence); mais il ne lui sera pas possible de se représenter la nature déterminéc de cette influence, ne pouvant rien concevoir de plus général, et toute autre influence lui apparaissant comme une altération de celle-là. C'est en ce sens qu'on peut considérer, avec Kant, l'espace comme une des formes de la pensée. C'est donc ce milieu neutre qui seul pour un être correspondra à la notion d'espace, notion impliquant l'élimination de toute force susceptible d'altérer les objets ou les formes qu'on y place.

Un tel espace est forcément homogène dans toute l'étendue qu'on lui conçoit. Tel est l'espace Euclidien. Les premiers milieux dérivés qui différencient cette homogénéité sont les espaces isogènes (ou à paramètre constant), c'est-à-dire des milieux où l'influence déformatrice, par rapport aux formes de l'espace perçu ou convenu comme homogène, s'effectue de la même manière en toute région de cet espace. Puis viennent les espaces hétérogènes ou à paramètres variables, dans lesquels l'influence déformatrice se modifie d'une façon continue. On peut concevoir les espaces absolument composés où l'influence déformatrice varie et se transforme suivant les lieux. Enfin, viennent les milieux à influences complexes, combinées et réparties de toutes les manières concevables.

Or, il est aisé de voir, en comparant les deux cas extrêmes, que le cas des espaces absolument hétérogènes répond tout simplement au milieu spécial de certains corps ou de certains champs de forces, et les espaces isogènes, tels que ceux de Riemann et de Lobatschewsky, répondent à un milieu où domine exclusivement une force simple.

L'Espace théorique et l'espace représenté

On voit donc, d'une part, qu'il existe pour la pensée un espace théoriquement euclidien, le seul véritable espace pur où les influences extérieures paraissent neutralisées (tous les autres étant des milieux dérivés de celui-ci par spécialisations); et, d'autre part, un espace représenté comme euclidien pour tout être sensible, espace qui n'est tel que relativement à lui et qui peut avoir un paramètre spécial relativement à des êtres doués d'autres conditions de perception. Mais, pour tout être, il existera dans son milieu certaines conditions absolument fondamentales dont sa représentation ne peut sortir ; et la représentation qui aura vidé de son contenu tout autre élément sera, pour lui, le maximum perceptible d'homogénéité répondant à sa notion d'espace. La raison permettant de concevoir mais non de représenter l'au-delà de ces conditions fondamentales pour la représentation, il sera possible d'assigner à cet espace, représenté comme tel, un paramètre tout comme aux autres. Mais, quand il faudra assigner une valeur quantitative à ce paramètre, c'est-à-dire le comparer à une quantité servant de base, cette base fera défaut, et la valeur assignée à ce paramètre sera forcément zéro ou l'infini.

Cet espace sera donc l'espace limite auquel toute spéculation sur d'autres espaces devra être rapportée pour qu'elle devienne intelligible.

Si l'on se reporte à la conception purement métaphysique de l'espace comme étant la compatibilité des existences individuelles, on voit aussitôt que tout paramètre est une restriction apportée dans les modes d'existence, et, par conséquent, une altération de l'espace. On voit aussi que, les modes possibles d'existence étant infinis, l'espace représente, pour un être, le maximum de généralité concevable d'existences individuelles possibles ; mais ce maximum, qui est un infini par rapport à l'être qui le conçoit, est, pour un être doué d'une conception plus vaste, une simple spécialisation des modes possibles, et pour cet être, le paramètre de cet espace cesse d'être infini ou zéro et acquiert une valeur finie. Je dis une valeur finie, parce que le nombre ou l'expression quantitative qui exprime un paramètre est toujours une qualification, car sa valeur quantitative est déterminée par sa situation par rapport à un étalon préalablement établi. On voit immédiatement que les espaces à paramètres variés sont, au point de vue rationnel qui les embrasse, de simples champs de volume indéterminé, si l'on veut, mais d'une forme définie, ou du moins d'un type générique de forme incomplètement déterminée. Ce qui caractérisera le type de chaque espace sera un élément impossible à percevoir pour celui qui est adapté dans toutes les conditions de son existence à ce caractère ; et ce caractère sera connu par lui, non comme une figure, mais comme la forme nécessaire de sa perception : il en aura une notion, non une représentation.

Ainsi s'explique cette constatation qu'on a faite que les divers espaces non euclidiens à trois dimensions peuvent coexister dans un espace à quatre dimensions, le caractère qui les différencie résidant dans cette quatrième dimension qui nous échappe comme telle.

Nous reviendrons en son lieu sur cette question.

***

Les géométries de Riemann et de Lobatschewsky s'écartent en sens contraire de la géométrie euclidienne, qui est comme leur neutralisation. De plus, les trois géométries s'identifient sous la forme euclidienne, quand on envisage des éléments infiniment petits. Cela prouve que, si l'on pouvait dilater suffisamment un espace non euclidien, les petites régions de cet espace tendraient de plus en plus à se rapprocher de l'état euclidien. On en a conclu avec raison que l'espace que nous jugeons euclidien n'est tel pour nous que parce que son paramètre est très grand, et que si nous pouvions en embrasser une région beaucoup plus grande, il cesserait d'être homogène. Il y a là, à mon sens, une confusion entre deux ordres de conceptions qu'il importe de distinguer. D'une part, l'espace théorique conçu par nous comme étalon neutre auquel tout autre espace théorique ou réel est rapporté ; d'autre part, l'espace représenté. Or ce qui précède est très probablement applicable à l'espace représenté. Mais l'espace théorique euclidien ne peut être altéré par rien : c'est un schéma typique invariable, indestructible, que nous concevons nécessairement en regard de toute autre géométrie, et sans lequel les au-

tres géométries s'identifieraient toutes dans la géométrie euclidienne.

Quoi qu'il en soit de l'état du milieu dans lequel nous opérons, il existe toujours un espace idéal métaphysique euclidien, homogène, par rapport auquel tous les espaces réalisés sont des altérations. Ce qui peut varier, c'est l'application de cet état homogène à tel ou tel ordre de réalité, et l'application dépend de la situation dans l'univers du sujet qui perçoit.

En effet, cet espace théorique neutre s'exprimera dans la représentation sensible par le minimum d'hétérogénéité introduite dans la perception ou l'action. Et cette représentation correspondra aux états qui répondent à l'équilibre le plus complet du sujet avec son milieu.

Si donc nous supposons des êtres doués d'organes sensoriels et de modes de sensibilité semblables aux nôtres en qualité (vue, toucher, locomotion), mais adaptés à des conditions d'intensité, de vitesse, de direction, etc., différents, leur état d'équilibre différera du nôtre, et le minimum d'hétérogénéité leur donnera, comme à nous, la représentation euclidienne; mais elle se produira à propos d'autres objets, et ainsi, une figure non euclidienne pour nous pourra être perçue par eux comme euclidienne, et vice versa. Mais la géométrie euclidienne n'en sera en rien altérée.

Si nous supposons maintenant des êtres doués de modes de perception de nature différente des nôtres, mais soumis aux conditions générales de la conscience psychologique, dont une des formes essentielles est l'espace tel que nous l'avons défini, il y aura pour eux une représentation de moindre hétérogénéité que nous ne pouvons figurer, mais qui sera caractérisée par des

propriétés corrélatives à notre représentation euclidienne, et dont celle-ci sera pour nous la traduction la plus exacte.

Le mode euclidien répond à la notion de valeur limite, valeur qui existe toujours pour le mode d'existence individuelle qui caractérise la conscience psychologique. Aussi, bien que ses applications sensibles puissent varier, il existera une géométrie euclidienne à laquelle aucune autre ne pourra se substituer, et répondant aux conditions neutres et primordiales de perception.

*
* *

Pour admettre au même titre les géométries non euclidiennes qui présentent pour nous des impossibilités de perception et de réalisation, il faut supposer des modes de connaissance étrangers à ce que nous nommons la conscience psychologique (c'est-à-dire à cette connaissance qui résulte du choc d'un moi et d'un non-moi et de l'élaboration par une activité mentale de données reçues passivement à travers l'exclusion établie par l'existence individuelle et corporelle). Nous avons précédemment admis la possibilité de modes de connaître affranchis des conditions qui, pour nous, définissent toute connaissance. Ce n'est qu'en sortant de ces conditions, considérées par l'école positiviste et relativiste comme les seules possibles, que l'on peut admettre les géométries non euclidiennes comme réalisables, en disjoignant les propriétés des figures qui, pour nous, sont fatalement liées ensemble.

Or on n'a jamais observé, il me semble, cette distinction, quand on a discuté la possibilité des géo-

métries non euclidiennes, et il en est résulté une confusion et des malentendus, qui, je crois, s'éclairciront en séparant nettement ces points de vue.

Ainsi, nous allons d'abord considérer les deux géométries de Lobatschewsky et de Riemann comme les éléments polaires (savoir et être) d'une géométrie générale dont la géométrie euclidienne sera l'élément neutre et fondamental. Ensuite, nous étudierons comment on est parvenu à constituer des géométries logiques, bien qu'en contradiction avec leur réalisation expérimentale. Nous montrerons, je pense, la cause de la confusion qui règne sur cette question, et nous chercherons quel mode d'existence impliquerait la réalisation et la perception d'un espace réellement non euclidien.

Relativité de la nature des espaces représentés

Il est facile de montrer combien est relative la représentation à laquelle correspond la notion euclidienne. Sans sortir de notre vie usuelle, nous pouvons constater sans peine combien est subjective notre notion de la ligne droite.

Si nous marchons les yeux bandés, nous dévions de la ligne droite sans nous en apercevoir ; les jeux forains ont tout leur attrait dans cette constatation. Il nous est presque impossible de tracer une ligne droite à mainlevée sans un apprentissage préalable. Quand nous sommes en wagon, privés de points de repère fixes, nous croyons cheminer en ligne droite sans nous apercevoir des nombreuses courbes que décrit la

voie. Voilà ce que la locomotion nous fournit sans le contrôle de la notion visuelle de ligne droite.

A son tour, la vision non contrôlée par la locomotion nous donne des renseignements tout aussi incertains La perspective nous fait prendre des parallèles pour de lignes convergentes : une verticale élevée et éloigné paraît être un arc de courbe. Et n'est-ce pas une représentation vraiment riemamienne que nous fournit la voûte céleste? La ligne de l'horizon est droite quand on la considère dans le champ visuel sans bouger, bien qu'elle soit en réalité un arc. Elle ne devient pour nous circulaire que si nous pivotons suru nous-mêmes pourla parcourir tout entière ; et ici nous touchons à l'horicycle et à l'hypercycle de Lobatschewsky, qui sont la droite euclidienne de l'infini. — Nous tenons pour lignes droites les géodésiques de notre planète riemannienne, et ces mêmes géodésiques convexes, vues du haut d'un ballon, se creusent en ligne de Lobatschewsky.

Prendrons-nous la donnée expérimentale qui attribue la qualité de ligne droite à l'axe de rotation d'une figure indéformable, entourée de deux points fixes ? Mais nous estimons que la rotation n'a pas déformé la figure en nous basant sur les seules constatations visuelles et métriques, qui nous trompent si souvent.

Observons la formation du cristallin inégalement réfrangible dans ses diverses parties, et jugeons des déformations qu'il doit apporter aux lignes perçues. Enfin, les illusions d'optique résultent de diverses juxtapositions, divisions, situations qui soulèvent de difficiles problèmes esthétiques. Cette déformation apparente des figures sans masse, par le simple jeu des directions, tend fort à prouver combien est subjective la similitude de nos figures géométriques.

L'interposition de l'atmosphère, et au delà, peut-être celle de certains milieux sidéraux plus ou moins réfringents peuvent enlever toute valeur objective à nos mesures astronomiques. La mesure de la ligne droite par la tension du fil à plomb est sujette à caution, car tout fil très long ne se tend jamais complètement. — Horizontalement, nous pouvons juger combien est relative notre estimation visuelle en regardant les fils télégraphiques à des intervalles plus ou moins éloignés.

On voit donc que nous ne pouvons attribuer une valeur objective à nos jugements sur les figures que lorsque nos divers moyens d'informations sont d'accord pour nous donner l'idée de la ligne droite. Et, même en ce cas, nous voyons que la rectitude n'est que relative à la synthèse limitée de nos modes de perception. Un mode de plus qui se trouverait en désaccord suffirait pour enlever à cette ligne le caractère de droite. Et même il suffirait que, parmi les états visuels, tactiles et locomoteurs qui sont neutres en même temps, un seul ait sa tonicité modifiée, pour que l'accord parfait de neutralité corresponde à des lignes tout autres. Ajoutons que nous ne pouvons établir les vérifications qui nous permettent d'attribuer à nos jugements cette objectivité très relative que pour de petites distances. Dès que nous embrassons une vaste étendue, tous ces modes perdent leur valeur. Et, par rapport à l'étendue perçue comme telle, nos figures euclidiennes ne sont telles que dans un espace infiniment petit. La géométrie euclidienne n'a donc d'application sûre que comme géométrie infinitésimale par rapport à celle qui régirait notre espace physique, si nos modes de perception, demeurant les mêmes nous devenions de gigantesques Gargantua.

Mais, par ce fait même, on saisit que cette géométrie est nécessairement la source des deux autres, puisqu'elle exprime les rapports infiniment petits et constants dont la sommation réalise les variations diverses.

Nous voyons en outre que l'on ne peut dire que tel milieu est ou n'est pas euclidien en soi : il est toujours euclidien par rapport aux êtres pour qui il répond à l'état neutre de perception, et pour les actions et les modes d'existence vis-à-vis desquels son influence s'annule; il l'est toujours dans la mesure où il peut être considéré comme infiniment petit par rapport à un autre milieu. Et, comme toute existence dans un milieu relativement fixe tend à s'y adapter, la notion et la représentation euclidienne tendent à s'établir parce qu'elles représentent l'adaptation intellectuelle et sensible à un milieu. Les divers sens s'adaptant chacun à ce même milieu fixe, ce milieu répondra bientôt à la fois au moindre effort pour chacun de ces sens ; la notion et la représentation euclidienne répondront à cette coïncidence.

C'est donc seulement en fonction de telles ou telles perceptions et actions qu'un espace peut être dit euclidien ou non.

Par conséquent, les trois géométries coexistent, s'impliquent et ne se définissent qu'en fonction les unes des autres ; elles sont applicables aux mêmes milieux suivant les perceptions et les actions que l'on considère. Nous participons à la fois aux trois sortes d'espaces, ainsi que les êtres qui nous entourent, et il est intéressant de déterminer les principales circonstances qui paraissent correspondre aux uns ou aux autres.

CHAPITRE II

Caractères des espaces non euclidiens

La Courbure dans les espaces non euclidiens

On a parfois confondu la géométrie de Riemann avec celle de la sphère,et la géométrie de Lobatschewsky avec celle de la pseudo-sphère. Mais c'est là une erreur. Ces deux géométries ont un degré de généralité bien supérieur, et qui leur donne un bien plus grand intérêt. On pourrait les qualifier : espaces soumis, l'un à la loi deconvergence,l'autre à la loi de divergence. Le degré de cette convergence et de cette divergence est déterminé par le paramètre ; et ce paramètre dans le cas le plus simple, est pour la convergence +1, pour la divergence —1. Voilà pourquoi la trigonométrie sphérique et la trigonométrie hyperbolique s'appliquent aisément à ces deux espaces. Ces deux espaces répondent donc très probablement à deux milieux fondamentaux du kosmos. Comme étant les deux premiers milieux dérivés de l'espace homogène ou euclidien dont le paramètre est infini, c'est-à-dire la courbure nulle. On peut donc dire que les deux espaces de Riemann et de Lobatschewsky sont les caractéristiques de la courbure dans son premier principe. Or la courbure est ce qui correspond à la présence d'une

influence extrinsèque à l'objet qui se développe dans l'étendue. Que l'on considère la perception psychique ou la réalisation mécanique, il n'y a courbure que là où une des conditions déterminatives de la ligne ne se trouve pas constamment dans le même rapport avec cette ligne. Le calcul différentiel répond à cette notion par la correspondance qui s'établit nécessairement entre la courbure et les fonctions à dérivées variables. Aux dérivées constantes c'est-à-dire à l'invariabilité d'un rapport correspondent des lignes droites. Peu importe, encore une fois, que ces lignes soient relativement ou absolument droites; toujours est-il que la courbure est ce qui résulte de l'application à des figures de la variabilité d'un rapport. Cette variation montre que les causes déterminatives de l'état d'un objet ne sont pas identifiées en une seule : elle exprime une dualité persistante ; la synthèse ne s'opère que hors des causes dans l'effet résultant, effet qui laisse distinguer la trace de deux causes distinctes.

Au contraire, quand la variation est constante, elle peut s'exprimer par un quotient unique, et la synthèse s'opère dans les causes, l'action est une; voilà pourquoi on peut alors supposer que cette action a sa cause dans le sujet lui-même. Nous touchons là à une question métaphysique très profonde : celle de la distinction des causes intrinsèques et extrinsèques. Les premières se présentent comme la finalité du sujet, finalité exerçant sur lui une attraction qui doit toujours, en dernière analyse, se ramener à une appétition; les secondes paraissent ne pas s'assimiler au sujet, et intervenir comme des causes déviatrices, comme des coercitions plus ou moins impérieuses qui solidarisent les êtres entre eux, et dont

l'harmonie consiste dans la réalisation d'une finalité embrassant un système d'individus.

Ainsi, la courbe semble nous révéler la dépendance des individus vis-à-vis de leur milieu. Les lignes droites représentent ainsi la somme des causes qui se sont identifiées en une seule action ; et l'espace euclidien, qui en est comme l'essence, est ce qui dans le kosmos est pleinement unifié en vue de la coexistence individuelle. C'est donc un degré du triomphe de l'ordre sur le chaos au moyen de l'espace, et l'espace euclidien est bien la limite vers laquelle tendent les deux autres à mesure que l'unification des tendances se réalise.

Là au contraire où les deux forces fondamentales de dispersion et de concentration dominent, nous saisissons des formes distinctes revêtant la matière ; elles représentent ce qui, dans les tendances, demeure composé, les cas où l'action est un compromis, une résultante, un accord ; c'est la résolution du chaos en conservant la diversité des tendances, qui synthétise sans identifier.

***

Dans la géométrie de Riemann, deux lignes droites quelconques sont assujetties à passer par deux points fixes ; elles enferment entre elles un espace ; elles forment chacune un cycle fermé. Cette géométrie semble correspondre à l'influence algorithmique qui régit les séries convergentes et qui fait aboutir une sommation infinie de termes à une intégration finie, car elle transforme la nature indéfinie de la droite en cycle. Une telle réduction dans le monde physique est ce qui constitue la corporification, résultat du principe d'individualité.

La géométrie de Riemann semble correspondre, non pas à l'individualité, même caractérisée par l'unité de centre, mais au rapport de conjonction entre individualités.

L'espace de Riemann équivaut à deux tores s'emboîtant réciproquement ; c'est comme le symbole de la compénétration de deux sphères d'attractions individuelles. Il crée une sorte de fuseau, bandant en arc toutes les droites, qui viennent passer toutes par les deux centres. Il semble que la nature a gravé le pentacle de ce principe de la conjonction binaire auquel correspond cette géométrie dans l'acte préparatoire de la copulation : la karyokynèse. La vibration, elle-même, avec son ventre et ses deux nœuds, qui est l'acte élémentaire de la vie individualisée est l'expression, plus générale encore, d'un espace enfermé dans deux droites ; car la vibration est bien l'acte de moindre résistance pour l'expansion individualiste vouée à un dualisme irréductible ; par elle se déchire l'hymen virginale de la ligne droite. Un vide intérieur est créé par la vibration, un retranchement fait à l'espace par l'autonomie de la monade-atome, et nous avons observé déjà que l'atome vu du dedans est un véritable espace, et qu'il n'est atome que relativement au milieu et aux êtres dont il n'est pas pénétré et qui bornent son individualité (1).

Ce caractère esentiel de la géométrie Riemannienne va se retrouver dans la sphère physique avec les formes concentrées et bipolaires et avec le binaire de l'appétition. Cette géométrie exprime la viscosité, cet état

---

(1) Voir : *La Synthèse concrète* (IIe partie) par F. WARRAIN.

qui tend à dissoudre l'individualité solide dans la liquidité. Or c'est à ce caractère qu'appartiennent la plupart des tissus animaux, et au premier chef, le protoplasma avec sa contractilité. En outre, nous avons vu que la fonction animale est une sorte de liquéfaction tellurique d'essence supérieure. La structure de l'animal, avec ses replis nombreux et ses réseaux assujettis à certains foyers, structure propre aux glissements des parties, enfin le caractère cyclique de tous les mouvements des animaux, tout cela paraît les assujettir en grande partie à la géométrie Riemannienne. La notion euclidienne de l'espace semble donc ne se former que lorsque l'intelligence émerge de la sphère instinctive lorsqu'elle acquiert des concepts dégagés de l'appétition ; et la notion de ligne droite est une donnée déjà complexe, et non primitive, comme la géométrie semble l'admettre.

La géométrie de Riemann est bien celle de l'appétition instinctive. Car, dans cet état, toute situation des objets est rapportée à deux centres : le moi et l'objet du désir. L'aptitude de l'instinct à varier ses moyens, qui, tous, cependant tendent à agir suivant les moindres résistances, est bien exprimée par l'infinité de droites passant par deux foyers. La droite euclidienne, dans ce milieu, n'est plus courte qu'idéalement : c'est la voie du désir plus rapide que l'activité ; cette voie est exclue du champ d'action, condition nécessaire pour que le désir puisse naître, et sans laquelle il se confondrait avec sa réalisation.

Toute droite, dans cet espace, est un cycle bipolarisé : tel est aussi le milieu instinctif, où toute sensation a pour réponse un réflexe qui ferme le courant reliant le sujet

à l'objet du désir. Entre eux, la zone est convexe, car l'appétition cherche à accaparer le maximum de voies possibles pour se relier à son objet.

***

Dans la géométrie de Lobatschewsky, au delà d'un certain angle, les droites ne peuvent plus se rencontrer : c'est une dispersion croissante. Un certain angle aigu dit angle de parallélisme établit cette limite, et transforme la convergence en approche asymptotique. Ces lignes sont dites alors parallèles ; enfin, toute perpendiculaire commune entraîne aussitôt une divergence.

Nous avons là une géométrie de la divergence, de la force répulsive et de la progression vers l'universalité.

Cette géométrie est celle de l'expansion magnétique ; celle de la raréfaction de matière, de la propagation et de la multiplication des forces par désintégration des monades-atomes. Elle montre, pour ainsi dire, l'envers de l'individualité. et ce point de vue se traduit par une courbure négative constante.

Une courbure négative constante est impossible dans un espace euclidien, car le cercle est ce qui définit la courbure constante, et le centre d'un cercle ne peut être du côté convexe de la circonférence. Il faut donc, pour concevoir une courbure constante négative, étendre la notion de centre comme l'algèbre étend la notion de nombre. Le centre d'une courbure de Lobatschewsky peut être imaginé comme un point étiré en axe; il en résulte que, suivant la position d'une ligne par rapport à cet axe (qui est un arc d'horicycle de longueur donnée égale au paramètre), la somme attractive des points de

cet axe varie par rapport aux conceptions euclidiennes, et donne une figure qui a de grands rapports avec l'hyperbole quadrilatère. On pourrait dire que le centre de l'hyperbole équilatère est constitué par ses deux axes ; et ainsi, à l'infini, l'hyperbole se relierait au cercle par le carré : c'est, du reste, ce que semblent démontrer certaines formules sur lesquelles nous reviendrons : l'une qui relie e à π, l'autre qui fait dériver π de $\sqrt{2}$, nombre de la diagonale du carré.

Ainsi, le passage de la géométrie euclidienne à la géométrie de Lobatschewsky s'opérerait par l'extension du cercle à l'infini. En effet, dans l'espace euclidien, le cercle à rayon infini devient ligne droite, et les normales de cette circonférence droite deviennent parallèles. Or, à cette droite euclidienne, qui est la borne de l'espace, s'identifient deux lignes de Lobatschewsky, qui possèdent chacune l'une des propriétés fondamentales de la droite euclidienne ; car, dans cette géométrie, les droites qui ont une normale commune n'en n'ont pas d'autres, et les parallèles se rapprochent sans s'atteindre, ce qui équivaut à un centre rejeté à l'infini. L'horicycle est le cercle dont les rayons sont parallèles ; il répond ainsi au cercle infini euclidien devenant droite. L'hypercycle est la ligne qui a toutes ses normales perpendiculaires à une droite commune ; il répond à la ligne brisée euclidienne devenant droite ; là, nous voyons le centre de ponctuel devenir linéaire. Or, dans l'espace euclidien, c'est à l'infini que la convergence non nécessaire mais possible s'évanouit.

Cette géométrie divergente exprime l'élasticité, cet état qui tend à disperser, et qui est le caractère essentiel des gaz. Or c'est à ce caractère divergent que se

rattache le principe végétal, dont nous avons reconnu la fonction aérifiante pour la terre. La forme même du végétal avec son collet étranglé, sa tige, ses ramifications et la structure intérieure de ses fibres sont comme le pantacle de l'espace de Lobatschewsky. C'est l'épanouissement floral, l'étirement de la matière.

C'est encore la manifestation intellectuelle et le magnétisme animal : elle répond bien à la propagation rayonnante des idées forces et à la transmission de la pensée. La concavité extérieure du faisceau des lignes exprime encore l'accroissement progressif de cette expansion.

La géométrie de Lobatschewsky correspond à l'intuition mentale. Car, dans cet état, on peut relier les points les plus extrêmes par le voisinage le plus étroit. Aucune fusion ne s'y opère, mais une infinité de voies peuvent tendre ensemble vers le même but sans jamais se confondre ensemble.

Le centre, ici, est un axe et se manifeste par une similitude d'orientation qui diverge aussitôt. C'est bien là le caractère des idées, qui ne restent jamais identiques entre deux individus, mais qui font sortir d'une uniformité fondamentale une grande diversité de conséquences qu'on peut réunir toujours aisément, quel que soit leur écart.

La droite euclidienne, voie de la volition, est ici comme un régulateur qui empêche les contacts résolutifs, et permet au développement évolutif de se poursuivre indéfiniment. C'est bien là le caractère de l'idéal, limite jamais atteinte et dont on approche sans cesse.

A cet espace correspondent les inspirations de l'art et en général les intuitions de la raison, qui établis-

sent, dans toutes les sciences, ces concepts limites dont Wronski a distingué le caractère irreprésentable par l'entendement, mais qui permettent le progrès indéfini de la connaissance.

***

Les géométries de Riemann et de Lobatschewsky correspondent ainsi aux deux états opposés de la matière, l'atomisme et le dynamisme, les corps et les forces physiques. Elles expriment les deux tendances qui produisent toute évolution : convergence et divergence. La géométrie euclidienne répond aux cas d'indifférence, d'équilibre, de neutralisation.

L'espace de Riemann est probablement la limite intérieure de l'espace euclidien, circonscrivant le patrimoine impénétrable des moi individuels où s'élaborent les grandeurs infinitésimales et les racines des quantités, le domaine des appétitions produites par l'irréductible binaire.

L'espace de Lobatschewsky paraît répondre à l'au-delà de l'espace euclidien. L'horicycle est l'aspect circonscriptif de cette frontière ; l'hypercycle est son aspect séparatif ; du dehors, c'est un cercle ; de chez nous, c'est une droite.

Ainsi se résoudraient les questions des limites de l'espace et de la divisibilité de la matière ; mais ces trois espaces pourraient bien occuper les mêmes lieux en se rapportant à trois ordres différents d'états. On peut ainsi envisager ces trois géométries comme se rapportant à trois modes de relations auxquelles sont assujettis les différents objets plongés au sein d'un même milieu.

Et ces trois géométries semblent intervenir à la fois dans la plupart des phénomènes ; l'une d'elle est en général prépondérante ; et peut-être certaines lois qui nous paraissent fort compliquées deviendraient-elles très simples si on appliquait l'une ou l'autre de ces géométries aux cas qu'elles semblent régir plus spécialement : par exemple, si on appliquait la géométrie de Riemann à la stéréochimie, à la croissance et à la locomotion animale, et celle de Lobatschewsky aux lois de la vaporisation, au développement végétal, à la propagation de la lumière et de l'électricité. De plus, tous les caractères esthétiques,les formes de la nature, les physionomies, les gestes, les modulations vocales et musicales offrent des manifestations expressives qui se rattacheraient sans doute à des rythmes dépendant de l'une ou l'autre de ces trois géométries.

La similitude et les espaces non euclidiens

Les géométries de Riemann et de Lobatschewsky présentent une propriété particulièrement remarquable, qui est le point fondamental du problème philosophique que nous aborderons tout à l'heure. Elles empêchent la similitude des figures. Dans ces espaces, la Forme est fonction de la Grandeur. Une forme ne peut être agrandie ou réduite sans se déformer. On voit aisément qu'en fait,les cas d'application de cette loi sont à peu près universels dans le monde matériel. Les lois de la cohésion, de la capillarité varient considérablement avec la grandeur, et toutes les formes naturelles un peu différenciées, depuis les cristaux jusqu'aux animaux, oscillent

entre des limites de grandeur qui se resserrent d'autant plus que la complexité de structure augmente. On pourrait dire que, c'est un principe fondamental que toute structure est fonction de la Grandeur Et les architectes du moyen âge ont montré en cela une intuition supérieure au génie grec en construisant leurs édifices, non pas d'après un rapport de proportions, mais d'après une échelle qui définit, d'une manière à peu près invariable, les dimensions de chaque organe, soit d'après la taille de l'homme, soit d'après la nature des matériaux.

Dans l'espace de Lobatschewsky, plus les côtés d'un triangle grandissent, plus la somme de ses angles diminue. C'est bien là ce que manifeste la nature. Les grandes surfaces tendent à s'affaisser, et là encore, nous pouvons admirer l'architecture du moyen âge, qui a donné à ses admirables flèches des profils concaves, et l'architecture grecque, qui a rendu convexes ses platebandes et ses colonnes. La déformation concave répond à un étirement, la déformation convexe à une compression linéraire. Elles répondent bien, la première à la tendance de multiplier le champ de perception ; la seconde, à concentrer l'intensité d'assimilation ; la première, au désir de connaître, la seconde, au désir de posséder ; la première, à une accélération, la seconde, à un ralentissement.

Ces deux géométries expriment cette grande loi que la Forme est fonction de la Quantité. Elles expriment, pour la quantité continue ou Grandeur, ce que les caractères propres aux divers nombres expriment pour la quantité discontinue. La Forme dépend non seulement du nombre, mais encore de la Grandeur, et la

mécanique semble indiquer qu'elle dépend aussi de l'Intensité, fait que l'observation établit clairement ; car l'Intensité ne peut varier que dans de très faibles limites, sans entraîner des modifications de Qualité.

L'indépendance de la Quantité vis-à-vis de la Qualité ne paraît possible que dans une étendue infiniment petite par rapport à une autre perçue comme qualifiée ; et la géométrie euclidienne correspondrait seulement à un milieu assez petit pour que la variation de la Forme en fonction de la Quantité soit négligeable. Mais, comme une Quantité n'a de détermination qu'en fonction d'une autre, l'espace euclidien demeure partout où les influences de la Quantité qualifiées en sens opposé viennent à s'annuler. Or ces conditions d'équilibre dépendent de la Qualité seule et peuvent se réaliser, quelles que soient les Quantités. L'espace euclidien n'est donc pas seulement l'élément infinitésimal des deux autres, mais encore l'état limite qui les détermine à tous les degrés.

On peut donc envisager l'indépendance de la Forme vis-à-vis de la Quantité de deux manières, l'une relative à un certain ordre d'existence, c'est le rapport infinitésimal, l'autre spéciale à des neutralisations de qualités opposées d'égale quantité.

Valeur objective des diverses géométries

Si donc nous nous en tenons aux modes de conscience auxquels correspondent les notions spatiales, les géométries non euclidiennes ne sont distinctes qu'à la condition de les rapporter à la géométrie euclidienne, et elles

ne peuvent se substituer à elle. On a dit qu'on se sert presque toujours de figures fausses, et que cela n'influe en rien sur le résultat de nos raisonnements, et que, par conséquent, nous pouvons attribuer à des figures euclidiennes des caractères non euclidiens : par exemple, décider que le 4e angle d'un quadrilatère trirectangle ne sera pas droit. Il y a là une confusion. En géométrie euclidienne, une figure fausse nous sert pour fixer notre attention, mais,en même temps,nous la redressons dans notre imagination, et, en réalité, nous raisonnons sur une figure représentée dans l'imagination. Mais,lorsqu'il s'agit de figure non euclidienne, nous ne pouvons redresser la figure; il faut supposer en elle des éléments qui seraient contradictoires s'ils qualifiaient des choses représentables. Par conséquent, la figure non euclidienne n'est pas une figure, c'est une formule algébrique, et rien ne prouve qu'elle puisse correspondre à des conditions spatiales. Or un concours de conditions qu'on ne peut faire correspondre à aucune représentation spatiale peut-il exprimer une géométrie ?

Il suffit, pour créer un système de relations rationnelles, d'établir des notions conventionnellement définies, puis de déduire de leurs propriétés arbitraires les conséquences logiques ; mais dans quelle mesure ces combinaisons seront-elles applicables à un ordre d'existence toujours plus ou moins concret, et qui, par conséquent, implique des données étrangères à ce qu'on a pu embrasser dans une définition ?

Or, c'est justement la question qui se pose quand on appelle droites ces lignes spéciales des espaces non euclidiens, qualifiées de droites parce qu'on les considère comme la plus courte distance, la ligne invariante

dans une rotation, la ligne toujours semblable à elle-même (propriété commune cependant à la droite, au cercle et à l'hèlice).

Ces lignes satisfont, il est vrai, à la définition de la droite établie par la géométrie euclidienne ; elles diffèrent de la droite euclidienne en ce qu'elles repoussent les propriétés de cette droite qui ne découlent pas de la définition adoptée et qui ont nécessité des postulats. Or ces postulats ne sont autre chose qu'un complément de définition.

On a donc considéré la droite définie sans les postulats et, par conséquent, incomplètement déterminée, comme un genre dont les droites euclidiennes et non euclidiennes seraient les diverses espèces. Evidemment, cela est légitime au point de vue logique; mais, pour que ces genres et espèces ne soient pas de simples classes de nos concepts, mais correspondent à une possibilité de rapports objectifs, il faudrait prouver qu'en fait et sous une forme spatiale concevable, il est possible de disjoindre les propriétés de la droite euclidienne comprises dans la définition d'avec celles qui font l'objet des postulats. Or il se pourrait parfaitement que ces deux ordres de propriétés soient liés nécessairement. On a échoué dans les tentatives de les déduire l'un et l'autre; mais ils pourraient peut-être se déduire l'un et l'autre distinctement d'un principe supérieur qui serait le véritable fondement de la notion de droite. Et alors, les géométries non euclidiennes n'auraient plus le droit de disjoindre les postulats de la définition, à moins de renoncer à exprimer un mode spatial accessible à une conscience psychologique.

C'est une confusion de ce genre qui fait dire que la

similitude n'est pas possible dans les espaces non euclidiens. Cela est exact, si l'on considère ces espaces comme des milieux où le paramètre intervient comme une fonction des variables euclidiennes. Mais cela devient faux,si l'on prétend qu'il peut exister, un espace où le défaut de similitude réponde au développement proportionnel de la dérivée des fonctions spatiales. En effet, si l'on qualifie de droite ce que l'espace euclidien représente avec une courbure déterminée, Il faut, pour être logique, qualifier de constants les angles qui varient suivant cette même courbure ; et alors, la similitude existe dans les espaces non euclidiens. Elle doit y occuper le même rang que dans l'espace euclidien, car la similitude se définit par la constance du rapport de deux quantités. Si la droite d'une certaine courbure est considérée comme de direction invariable l'angle d'un certain évasement progressif doit aussi être considéré comme constant, quel que soit le prolongement de ses côtés.

***

Nous touchons là à la clef du problème. Il eût fallu fonder la géométrie, non sur la définition de la droite seule, mais sur les définitions de la droite et de l'angle l'un en fonction de l'autre ; car la notion de la droite et la notion de l'angle s'impliquent réciproquement. C'est du reste le caractère de toute réalité.

L'isolement complet d'une notion lui enlève son caractère de réalité, et la réduit à la valeur d'une pure entité conventionnelle d'où l'on ne tirera évidemment que ce qu'on y aura mis. Il est singulier qu'après la critique si profonde et parfois si excessive que Stuart Mill

a fait du syllogisme, les mathématiques actuelles tendent à verser dans les mêmes abus que la scolastique par l'excès inverse : celui du nominalisme. Or, si l'on considère les notions définies qui servent de base aux sciences mathématiques comme ne répondant à rien autre qu'aux caractères strictement définis, il faudrait éviter de leur conserver les noms qui s'appliquent généralement à des objets plus ou moins concrets de la connaissance; car on est tenté d'attribuer à des déductions,qui ne sont plus alors que de simples jeux d'esprit, une valeur d'application ; il faudrait alors s'en tenir à l'algèbre pure,et considérer comme fortuites ses adaptations géométriques, mécaniques, économiques.

L'abstraction de la géométrie est une nécessité destinée à permettre l'analyse du concret, mais elle n'a de valeur que si ses schémas sont toujours l'expression simplifiée d'une notion plus concrète tirée de la réalité. Hors de là, rien ne ferait différer la géométrie du code d'un jeu d'échecs ou de whist avec les conséquences rationnelles dépendant des conventions primitives, et les combinaisons qui en sortiraient manifesteraient simplement les lois de l'entendement : ce ne serait pas résoudre le problème de l'étendue, mais renoncer à l'étudier.

CHAPITRE III

Notions fondamentales de la géométrie

Notion de la ligne droite

Les définitions géométriques de la droite par la moindre distance (Lagrange), par la ligne invariable dans une rotation, par le caractère d'être déterminée par deux de ses points, par la propriété d'être toujours superposable à elle-même, enfin celle d'Euclide, la plus profonde, quoique la plus obscure, « la ligne qui repose également sur tous ses points », ne sont pas des conventions arbitraires, mais des tentatives d'exprimer par un de ses aspects le caractère fondamental qui définit l'essence de la droite. Or ce caractère consiste dans la notion de la *moindre variété de perception nécessaire pour relier deux objets à travers l'espace.* C'est dans ce principe métaphysique et indépendant des modes subjectifs de représentation spatiale que doivent s'accorder les postulats. On ne peut les relier les uns aux autres sur le terrain sensible ou analytique, parce que la notion de droite répond justement au cas où tous les modes de perception dont un sujet est doué, sont d'accord pour lui fournir la notion du minimum d'hétérogénéité perçue, à propos d'une ligne.

Par ces considérations, la notion de droite se trouve établie en dehors de toute représentation subjective et de toute définition conventionnelle,et simplement basée sur un principe métaphysique applicable à tout être doué de la conscience spatiale, quels que soient le genre de milieu et la nature de ses organes sensoriels.

***

Pour nous, une ligne ne sera droite que si elle répond au minimum d'hétérogénéité perçu à la fois par la vue, le toucher et le sens musculo-locomoteur.

Pour la vue, la droite est d'abord le rayon visuel ; elle répond au moindre déplacement des muscles moteurs de l'œil pour percevoir constamment un objet tandis qu'on s'en rapproche. D'une façon médiate, l'œil juge ligne droite celle qu'il suit du regard avec la moindre variation d'actions musculaires ; mais cette appréciation perd sa valeur dès que l'angle parcouru est trop grand.

Pour le toucher, la moindre hétérogénéité consiste dans l'absence de rugosité ; elle est simplement l'origine de la notion des différents ordres infinitésimaux. Vis-à-vis de ce sens, la notion de ligne droite se réduit à l'absence de variation par rapport à une grandeur dirigée.

Pour le sens musculo-locomoteur, la ligne droite est ce qui nécessite la moindre accumulation d'une même grandeur choisie comme mesure. L'effort musculaire donne ici une indication très peu précise, et fait qu'on lui préfère l'emploi d'un objet rigide servant d'étalon. Mais les personnes qui s'élèvent peu au-dessus de leurs impressions subjectives évaluent les distances par l'effort

ou la durée qu'elles exigent pour les modes de locomotion qui leur sont propres, et n'attribuent aucune valeur aux mesures topographiques qui ne concordent pas avec leurs données purement subjectives. Cela montre bien à quel point l'idée de ligne droite dérive de la notion métaphysique de la moindre séparation entre les objets.

Comme cette moindre séparation vis-à-vis d'un sens (de la vue , par exemple) ne coïncide pas toujours avec la moindre séparation vis-à-vis d'un autre(de la locomotion, par exemple), il se forme peu à peu une notion abstraite applicable aux cas où la moindre séparation (ou, si l'on préfère, la moindre hétérogénéité de perception) pour tous nos modes de perception coïncide, et cette notion abstraite est celle de la ligne droite. A ces cas spéciaux répond en général une représentation particulière pour nos divers sens,et ce sont ces représentations qui ont fourni les diverses définitions de la droite. Il nous arrive de juger hâtivement, d'après une seule de ces représentations,surtout d'après les représentations visuelles qui nous fournissent les données les plus rapides. Or, si le contrôle de la locomotion ne fournit pas son minimum propre, nous disons que nous avons eu une illusion d'optique. Nous attribuons plus de valeur objective aux données locomotrices parce qu'elles exigent de plus grands efforts.

Mais la notion de droite, bien qu'abstraite, est une donnée synthétique. Elles doit satisfaire à tous les minima d'hétérogénéité perceptibles pour un sujet à propos d'une ligne. La droite est relative à un sujet, et, si nous avions un sens de plus, ne serait droite que la ligne qui satisferait en outre à ce nouveau sens ; car c'est

l'accord de nos divers modes subjectifs de perception qui seul confère une valeur objective à leurs données.

Ce qui le prouve, c'est que le vulgaire est porté à restreindre la dénomination de droite d'abord aux verticales ; ce n'est qu'ensuite qu'il l'étend aux lignes horizontales, puis aux parallèles et aux perpendiculaires, enfin aux obliques. Ainsi, le rapport de moindre hétérogénéité fléchit devant la généralisation abstraite jusqu'à se contenter de la constance dans le rapport des distances entre deux droites ; et c'est là que s'arrête la droite euclidienne. Mais cette extension est justifiée parce que le sujet constate que, dans tous ces cas, il lui est possible de se porter dans une position telle que la ligne lui apparaîtra suivant le minimum exigé ; alors, il dégage la notion de direction de celle de droite.

***

Au delà, dans le même ordre d'idées, se trouve la ligne plane, que la vue placée dans son plan peut considérer comme droite ; mais l'accord avec la donnée locomotrice n'est plus possible, et, de plus, il suffit que la vue se déplace hors du plan pour que l'aspect rectiligne disparaisse. On saisit ici que la notion de droite implique l'espace à deux dimensions quant au toucher, et à trois dimensions quant à la vue, car le toucher peut distinguer la droite de la courbe en restant dans leur plan ; la vue ne les distingue qu'en se plaçant hors du plan. Si, au lieu du plan, il s'agissait d'une surface quelconque, le toucher confondrait les droites avec les géodésiques de la surface. Alors, pour qu'il distingue la droite, il lui faut pénétrer dans la troisième dimension.

Il se peut donc que nos droites soient des géodésiques par rapport à une quatrième dimension. Les géométries non euclidiennes représenteraient le rabattement dans l'espace à trois dimensions des géodésiques dont nos droites sont les projections dans notre espace. Mais il n'en existerait pas moins, dans cet espace à quatre dimensions, des droites que le rabattement dans nos trois dimensions ne modifierait pas. Donc, la notion et les propriétés des droites euclidiennes subsisteraient encore dans cette hypothèse.

La substitution des géométries non euclidiennes à l'euclidienne suppose la possibilité, par rapport à certains modes de perception conventionnels, de satisfaire à la notion de droite (autrement dit, de moindre hétérogénéité et de moindre effort dans les relations spatiales) sans admettre les postulats et la similitude qui en découle.

Or nous allons montrer que les postulats ne sont autre chose que des compléments des définitions de la droite, définitions qui, à elles seules, ne donnent qu'une droite abstraite et sans réalité possible ; définitions fautives parce qu'elles ont méconnu que la notion de droite est une notion complexe qu'il n'est possible de déterminer que pour la double notion de ligne et de direction.

La direction et la longueur

C'est dans la notion de distance, comme l'a établi M. de Tilly, que toutes les géométries ont leur source, et toutes se ramènent à trois types : l'euclidien, qui repose sur les deux postulats, celui de Riemann et celui de

Lobatschewsky, qui excluent chacun l'un des deux postulats. M. de Tilly a montré que les deux postulats ne peuvent s'exclure tous deux à la fois, et que, par conséquent, ces trois géométries représentent tous les types possibles. Mais, dans ces considérations, la distance n'est considérée qu'au point de vue analytique, comme le nombre conventionnel qui mesure les intervalles entre des points.

Au point de vue métaphysique, on pourrait définir la distance comme *la moindre intensité de séparation entre des individualités dont les existences ne s'excluent pas, c'est-à-dire sous le rapport d'espace.* Mais la distance a une double forme : elle est linéaire et angulaire. Elle nous est connue comme linéaire surtout par la perception locomotrice, et comme visuelle surtout par la perception visuelle. La vue cependant peut fournir des notions linéaires, mais plus péniblement, et le sens locomoteur donne quelques notions angulaires mal précisées. Aussi, chacun de ces deux sens s'est pour ainsi dire spécialisé à la notion qu'il développait le mieux. Mais toute donnée sensible réunit la direction et la ligne : nous ne percevons jamais de direction sans longueur ni de ligne non orientée.

Ce double aspect de la distance n'est pas seulement relatif à nos modes spéciaux de perception ; il touche à la nature même de l'individualité corporelle, et, par conséquent, il possède une valeur beaucoup plus générale. Nous avons vu que l'individualité corporelle est une synthèse fonctionnant tantôt comme unité, tantôt comme pluralité, et que la vie psycho-organique consiste dans les réactions de ces deux caractères. C'est ce dualisme même qui caractérise l'état de vie individuelle. Il en

résulte que tout individu est doué de deux sortes de mouvements. Tantôt il fonctionne comme unité par rapport au non-moi; il se meut comme un point mathématique : c'est une translation. Tantôt il fonctionne comme collectivité et modifie le milieu intérieur de son moi, de manière à changer les relations spéciales de ses organes avec le non-moi. Or la somme de ces changements spatiaux des parties par rapport au non-moi, sans déplacement de l'ensemble, constitue une rotation. La séparation minimum éliminable par translation est la distance linéaire ; la séparation minimum éliminable par rotation est la distance angulaire.

Ce qui est appréhendé simultanément sans translation est un contact; ce qui est appréhendé simultanément sans rotation est une direction.

Un angle est le rapport de deux directions ; il est évalué en fonction de la proportion de contact qui est indiqué par la quantité de rotation qu'il absorbe. Mais une direction prise en elle-même n'a pas de longueur ; elle indique une orientation comme déplacement rotatoire ; et c'est en cela que consistent les différentielles. L'élément différentiel ne retient d'une ligne que sa tendance à s'écarter de sa direction précédente, ou, plus généralement, il ne conserve d'une fonction que le rapport dans lequel elle tend à s'accroître vis-à-vis de sa variable.

Il ne faut donc pas définir l'angle comme l'espace compris entre deux lignes, car l'angle n'implique aucune longueur, mais comme le rapport de directions développables en lignes. Les postulats de la géométrie classique dérivent de l'inexactitude qui a défini l'angle comme un rapport de lignes, et qu'on l'a déduit de la ligne, alors qu'il en est indépendant.

Toute translation prise en elle-même n'a pas de direction définie ; elle ne distingue ni rectitude ni courbure. Pour distinguer une droite d'une courbe, il faut la possibilité d'une rotation, par conséquent un espace à deux dimensions.

Quand l'absence de rotation coïncide avec le minimum de translation nécessaire pour réunir deux objets, la ligne conserve une direction invariable; elle est droite.

***

La notion de droite est ainsi la synthèse des notions de direction et de longueur. La direction cessant d'être infinitésimale, acquérant une longueur effective, revêt le caractère de la constance par rapport à l'angle qu'elle développe avec une autre direction ; le droite représente ainsi le cas où la longueur n'influe pas sur la forme.

Il résulte de là qu'entre deux directions (constantes ou rectilignes), le rapport angulaire est constant. Ce rapport peut être exprimé en arc comme une fraction de rotation, ou bien comme la dérivée d'une fonction où les deux variables sont deux longueurs, ou bien encore comme le quotient de la longueur dirigée par une longueur réunissant la première à une direction fixe suivant un angle constant : c'est là le rapport trigonométrique dans son acception la plus générale.

La constance de ce rapport mesurant un angle, quand on en prolonge indéfiniment les côtés, est la traduction algébrique de la propriété géométrique de similitude. Le parallélisme peut ainsi se définir comme le cas où deux lignes A et B sont telles que, si on les relie point

à point par des lignes intermédiaires menées suivant un angle constant, la longueur de ces lignes intermédiaires sera constante.

Et l'on voit que cette propriété découle de la notion même de droite. Les deux postulats euclidiens rejetés par les autres géométries deviennent ainsi de simples corollaires de la propriété de similitude. En effet, puisque la fonction qui définit les deux lignes dirigées a une dérivée constante et finie, pour toute valeur finie des deux variables, la fonction n'admet qu'une solution : les droites se rencontrent forcément en un point déterminé par la valeur du rapport, et en un seul. Cela posé, la droite qui fait fonction de détermination angulaire en vertu de son invariablité de direction nous découvre par elle seule le caractère bipolaire de toute direction, le diamètre formant bipartition égale de l'espace, dans ses moindres portions comme dans ses plus grandes. Et l'on pourrait partir de cette considération pour démontrer que d'un point à un autre on ne peut mener qu'une seule ligne droite. En effet, une deuxième droite empiéterait forcément sur l'une des parties égales de cet espace (supposé homogène aussi grand qu'on veut, mais non infini, sans quoi toute distance finie deviendrait nulle).

Une nouvelle égalité de bipartition réalise la perpendicularité avec ses quatre angles droits égaux. Ce minimum de différenciation quant aux angles répond au maximum de contraste quant aux directions qui les déterminent. L'égalité des obliques également écartées du pied de la perpendiculaire découle de ce fait que l'inclinaison des directions détermine la mesure des angles. Les angles étant égaux, les longueurs similairement dirigées d'un même point doivent être égales.

La définition d'Euclide, pour obscure qu'elle soit, implique cependant cette notion d'invariabilité de direction associée à la longueur d'où découlent les deux postulats contestés. Si on a pu considérer ces postulats comme indépendants de la définition de la droite, c'est qu'on a voulu faire découler l'angle de la ligne. Or ce sont deux notions primitives qui n'existent que l'une par l'autre, comme élément être et élément savoir, reliés et neutralisés par la notion de distance, qui est leur élément neutre. Sans la notion d'angle constant il n'y a ni droite ni courbe, mais simplement des lignes. Sans notion de ligne, il n'y a pas de développement angulaire, pas d'étendue, simplement des tendances dirigées, des rapports de pure qualité.

***

Donc, à côté de la ligne droite se forme une notion tout aussi primordiale, celle de la ligne à courbure constante: le cercle. Le cercle est la seule ligne plane partageant avec la droite la propriété d'être semblable à elle-même en tous ses points. (Dans l'espace à trois dimensions, l'hélice, qui dérive du cercle par son périmètre, de la droite par son axe, est la combinaison de ces deux lignes, et partage seule avec elles cette propriété.) On arrive à la notion du cercle d'une manière aussi immédiate qu'à la notion de droite, par l'attribution d'une expansion fixe à l'élément de rotation. Quand la rotation s'effectue sans que la translation varie, la direction conserve une égale intensité, qui, évaluée en longueur, se traduit par une surface limitée par une ligne dont tous les points sont équidistants du centre de rotation. L'angle

se définit en fonction de la longueur par l'intégrale d'une longueur qui est ici constante et produit la circonférence. Les rapports de distance linéaire de tous les points d'une ligne, par rapport à un point fixé, sont ce qui donne la notion de courbure. La courbure constante répond au cercle. La circonférence pourrait se définir une ligne parallèle à un point.

La ligne droite correspond à la courbure de rayon infini. Si on rend le rayon fini, la rotation de la ligne droite par rapport à un point correspond à la fonction trigonométrique de la tangente, sur laquelle nous reviendrons plus loin. Mais on voit ici que la notion de tangence se présente immédiatement, sans se déduire du rapprochement des deux intersections d'une sécante jusqu'à les faire fusionner en un point double.

La perpendicularité est la notion de moindre distance d'un point à une ligne ; elle dérive donc ici de la seule variation de courbure et n'a pas besoin de se ramener à l'angle droit, mais peut se définir par la tangence au cercle.

Nous reviendrons plus loin sur ces diverses relations. Ce qu'il faut retenir ici, c'est que la notion de courbure découle immédiatement de l'application d'une longueur au mouvement de rotation, et qu'on n'a pas à la déduire de la ligne brisée.

Système des éléments fondamentaux de la géométrie

C'est parce que l'on a négligé dans la géométrie euclidienne de développer concurremment les deux notions d'angle et de ligne et de leurs deux éléments transitifs,

qui sont la courbure et la rectitude,que l'on s'est heurté aux postulats qui font le scandale de nos géomètres. L'échec provient toujours du même vice philosophique, qui consiste à vouloir déduire d'un seul des trois principes radicaux de toute réalité, la réalité tout entière; alors que la réalité n'existe que par leur compénétration réciproque. Et cette tendance erronée provient de ce que la réalité, en se développant dans les éléments universels, se concentre sur l'un ou l'autre de ses deux pôles, et par là tend à faire oublier la réalité de l'autre, ensuite que, dans les éléments transitifs, les deux éléments être et savoir échangent leurs fonctions. Si donc on a donné dans l'illusion qu'un seul des éléments est primitif, on entrevoit la possibilité de lui subordonner son opposé; mais cette illusion est sans cesse déçue, et on se trouve acculé ou bien au scepticisme, ou bien à un relativisme nominaliste, danger considérable que courent les mathématiques, surtout depuis ces dernières années.

C'est là où la doctrine de Wronsky nous apparaît comme un phare lumineux, et rétablit l'ordre en nous soulevant le voile de l'essence trine de toute réalité (1).

Partant des notions de distance (EN), de translation (ES) et de rotation (EE), comme éléments primordiaux, on a pour éléments universels la ligne (US) et l'angle (UE), puis, comme éléments transitifs, la ligne droite

---

(1) Le schéma que j'esquisse ici n'a pas été donné par Wronski; il est seulement établi d'après ses principes, et il en montre la fécondité. Wronski a donné un schéma de la géométrie (que nous verrons ailleurs) sensiblement différent ; mais le point de vue y est autre, et il n'y a nulle contradiction entre le schéma de Wronski et l'ébauche de schéma que nous indiquons ici.

orientée (TS),qui définit une direction,et la ligne courbe périphérique (TE), qui définit une rotation (1).

La partie systématique comprend l'influence partielle de la rotation dans la translation rectiligne (E en S) ; c'est la ligne brisée réalisant les figures polygonales. Et là encore, le rapport ternaire se présente et vient fortifier le postulat rejeté par Riemann, et que nous avons déduit de la considération de la droite comme l'identification, d'une translation minimum avec une rotation nulle. Il faut trois angles et trois droites pour circonscrire un espace par translation sans courbure ; c'est le symbole des trois pas de Wishnou, définissant les formes par la propulsion volitive pure parfaitement unifiée.

Dans le passage de la ligne droite au polygone régulier, nous voyons la pluralité infinie des centres de rayon constant constituée par le parallélisme des droites se compacter en un nombre de centres finis (centre des médianes, des bissectrices, du cercle inscrit au circonscrit, etc.), et cette transformation tend vers l'unité de centre dans les polygones réguliers. Ici,se présente comme corollaire le postulat de l'enveloppante plus grande que

---

(1) ES = Elément Savoir.
EE = Elément Etre.
EEN = Elément Neutre.
US = Elément universel Savoir.
UE = Elément universel Etre.
TS = Elément Transitif Savoir.
TE = Elément Transitif Etre.
E en S = Influence partielle de l'Etre dans le Savoir.
E en S = Influence partielle du Savoir dans l'Etre.
CF = Concours final : (influence réciproque).
PC = Parité coronale.

l'enveloppée (entre lignes convexes réunissant deux points) En effet, les segments droits de ces lignes croissent proportionnellement en s'éloignant du centre. L'influence partielle de la translation rectiligne dans la rotation (S en E) divise les centres en foyers, et aboutit à former des courbes ouvertes ayant une asymptote. La parabole marque le passage où l'un des foyers atteint l'infinie pluralité des centres en se transformant en droite.

Le concours final (CF) entre la relation rectiligne et la rotation concilie les deux principes dans la spirale, où une infinité de rotations complètes s'ouvrent en une translation qui tend vers la translation infinie dans toutes les directions. Là, le double caractère de la distance agit comme principe téléologique. Enfin, la parité coronale (P. C.) du système représente la distance à une puissance supérieure dans la synthèse de sa double forme universalisée : c'est la surface qui peut être engendrée, soit par rotation, soit par translation.

Conclusion

En définitive, les géométries non euclidiennes peuvent se concevoir de trois manières : 1° concurremment avec la géométrie euclidienne, comme relatives à certains milieux caractérisés par une influence générale typique imprimée à tous les objets, influence que l'on extrait de la forme des objets pour la mettre en facteur commun. Ces géométries définissent alors plus clairement les lois générales de certains milieux. Et les lignes qui n'ont d'autre variation spéciale que ce caractère typique sont jugées droites par rapport à ce milieu.

2° Ces géométries peuvent faire correspondre des notions différentes à une même représentation. A ce titre, elles équivalent à une géométrie euclidienne établie sans figures représentatives, mais avec symboles conventionnels.

Dans ces deux cas, les propriétés de la ligne droite doivent demeurer intacts.

3° Ces géométries peuvent disjoindre les propriétés de la ligne droite non reliées entre elles par une démonstration, et supposer trois espèces de droites, dont l'euclidienne seule réunirait toutes les propriétés reconnues par l'expérience. Cette distinction suppose qu'on n'attribue à la notion de droite que la valeur abstraite et

arbitraire exprimée par les définitions classiques. Or nous avons vu que cette notion se fonde sur une nécessité métaphysique, et qu'elle est composée par la réunion de deux notions de ligne et de direction. Disjoindre les deux groupes des propriétés découlant de ces deux notions constitutives de celle de droite, c'est supprimer non seulement la représentation de la ligne droite, mais encore sa notion métaphysique. C'est donc conserver le même nom quand le caractère essentiel de la chose a disparu, et c'est là un procédé défectueux, que nous avons relevé déjà à propos de la vie et de l'âme, et qui rend indéchiffrables une foule de problèmes.

Mais on peut se demander dans quelles conditions d'existence il est possible de réaliser la notion (non plus de droite), mais de cette chose qui établit dans l'espace le minimum d'hétérogénéité de perception et la moindre séparation des individualités. Ce sera évidemment : 1° lorsque la rotation seule ou la translation seule seront possibles, et cela répond à la perception réduite à deux ou à une dimension sans conscience de la notion de dimension ; 2° lorsque la translation et la rotation sont liées de telle façon qu'on ne peut les concevoir dissociées. Alors, le milieu est une certaine fonction du sujet, et l'influence déviatrice de tout mouvement n'est attribuée ni à une force régissant le milieu (1er aspect des géométries non euclidiennes) ni à une force régissant le sujet (2e aspect), mais comme attachée à la relation même du sujet avec le milieu (3e aspect).

Or nous participons en partie à ces conditions. Notre vie n'est pas tout entière contenue dans l'espace euclidien ; elle ne s'écoule dans cet espace que dans la mesure où nous fonctionnons comme synthèse, c'est-

à-dire comme unité combinée à une pluralité. Mais là où nous sommes unité irréductible ou bien pluralité non unifiée, nous sommes hors de l'espace euclidien. Cet espace répond à la somme des fixités relatives à nos changements, fixité qui permet d'ordonner nos perceptions en permettant d'établir et de comparer les formes en les rapportant à des rapports invariables. C'est dans la mesure où s'établit cet équilibre mobile, qui constitue la synthèse de la vie psycho-organique, que nous sommes contenus dans l'espace enclidien.

Mais la perception claire fournissant des concepts précis et les actions définies que nous pratiquons ne comprennent qu'une part assez restreinte de notre vie. Les concepts, les notions définies, et spécialement nos notions de temps, d'espace, de mesure, de nombres, de direction, etc., sont des acquis, des données fixées par le travail intellectuel et nécessitées pour établir l'ordre dans l'accomplissement de nos fins. Ce ne sont pas des formes primitives ni finales de notre évolution psycho-organique. Cette zone de la conscience claire est enveloppée d'une infra et d'une supra-conscience. Hartmann a été un des premiers à faire pénétrer la philosophie dans ces domaines. Et depuis, la psychologie expérimentale a beaucoup étudié l'infra-conscience et fort peu la supra-conscience. Je n'ai ici qu'à signaler ces deux domaines qui enserrent celui de la conscience claire, comme correspondants aux géométries non euclidiennes dans leur pleine substitution à l'euclidienne. L'espace euclidien serait ainsi le domaine de la conscience claire: l'appétition instinctive semble répondre à l'espace de Riemann, et l'intuition supérieure de la pensée à celui de Lobatschewsky, ainsi que nous l'avons

vu. Ces deux espaces peuvent donc exister seuls là où existe exclusivement l'appétition ou la pensée pure, mais non l'état de vie psycho-organique et de conscience proprement dite. Le premier est l'empire du binaire irréductible sur lequel est fondée l'individualité, le second tend à établir l'universalité. L'espace euclidien est donc le milieu où les deux tendances fondamentales de la dispersion et de la concentration se rencontrent et se neutralisent : c'est l'état de la vie sensitivo-volitive. Et il est à penser que les trois espaces s'évanouiront comme tels lorsque l'antagonisme radical des deux forces se résoudra en harmonie sous l'influence téléologique du temps.

SECTION II

LA GÉOMÉTRIE A *N* DIMENSIONS

CHAPITRE Ier

Les Ordres Spatiaux

La géométrie se ramène à des notions de figures et à des notions de situation. Tantôt nous considérons la synthèse individuelle formée par un ensemble de grandeurs et de directions : cet ensemble constitue une figure. Tantôt, nous examinons les relations de grandeur et de directions qui existent entre certains éléments considérés comme des individualités distinctes, et nous formons des synthèses de relations qui constituent des milieux ou des espaces.

On peut dire que deux figures géométriques sont du même ordre quand leur rapport de grandeur est fini, autrement dit lorsque l'une ne peut être renfermée dans l'autre sans lui soustraire une portion de son étendue. On peut appeler ordre spatial tout milieu indéfini capable des figures d'un même ordre. On classe généralement les ordres spatiaux d'après le nombre de dimensions qui

leur correspondent : le point est alors d'ordre zéro. Mais le concept de dimension n'est qu'un des divers schémas représentatifs des ordres spatiaux, schéma basé sur l'essence de la ligne et sur la réitération du contraste maximum simultané réalisé par la ligne, schéma auquel correspondent les figures rectangulaires.

Or certaines conceptions géométriques sont fondées sur l'essence du point ou de la surface, et on peut développer les ordres spatiaux autrement que par le contraste maximum simultané, et en engendrant des figures non rectangulaires.

Nous étudierons d'abord les transitions qui relient les ordres spatiaux, soit en transférant certains éléments géométriques du milieu aux figures et réciproquement, soit en faisant sortir les ordres spatiaux d'une opération effectuée au moyen de certaines figures.

Ces transitions opposent aux contrastes distinctifs des ordres une continuité sans laquelle les divers ordres spatiaux seraient isolés, et ne permettraient à aucune géométrie d'embrasser plusieurs ordres dans les mêmes notions générales.

Les figures se rattachent plus ou moins au principe de la rotation (ou de la centralisation),puisqu'elles groupent des éléments en une individualité; mais elles participent aussi du principe de translation,puisqu'elles résultent des rapports existants entre plusieurs grandeurs distinctes. Les figures régulières en fonction du point réalisent cette combinaison du principe de translation avec le principe de rotation, sous sa forme plus simple. Les dimensions se rattachent particulièrement au principe de translation puisqu'elles consistent en des prolongements indéfinis; mais elles dépendent cependant du principe de ro-

tation, parce qu'elles impliquent des directions de contraste maximum. Ces deux concepts de figures régulières et de dimensions seront donc les deux schémas qui nous permettront le mieux d'étudier la constitution des ordres spatiaux.

Détermination des figures

Il importe de remarquer : 1° que tous les éléments distincts en lesquels une figure consiste sont généralement surabondants pour la détermination de cette figure (ainsi, pour un triangle, 3 éléments sur 6 suffisent) ; 2° que le nombre de distances ou de directions nécessaires pour déterminer une figure dépend de certaines conditions générales de l'étendue, et le nombre de ces conditions dépend de celui des dimensions. Par exemple, il faut 3 lignes droites (ou une courbe) pour circonscrire une surface finie ; il faut 4 points et 6 distances pour déterminer un point sur une surface, 5 points et 10 distances pour le déterminer dans un volume, etc.

Cela montre que l'individualité se produit en fixant au sein de la zone des déterminations possibles qui constituent un genre, certains éléments, qui en entraînent avec eux un certain nombre auxquels ils sont indissolublement liés, et qui éliminent en même temps tous les autres. Ainsi, individualiser, c'est faire entre une collection finie ou infinie, continue ou discontinue, un choix qui n'est pas entièrement libre, et qui entraîne avec lui certaines nécessités. Et ces nécessités résultent du commencement de déterminations établies au sein du genre, déterminations qui seules le définissent. Et la réalisation de l'individualité répond à l'aliénation totale de la liberté

qui subsistait au sein du genre. L'individu est formé quand il ne reste plus rien d'indéterminé en lui. Dans la vie, comme le nombre des éléments et leur hiérarchie forment une sériation continue, la détermination n'est jamais achevée ; c'est pourquoi l'individu peut évoluer et se transformer, et la vie implique le mouvement. Ce qu'il y a de déterminé chez le vivant, ce sont surtout les tendances spatiales qui se réaliseront au moyen du temps.

***

D'une manière générale, la détermination complète d'une figure n'est que relative au point de vue embrassé par la perception comme le domaine intégral du possible, ou volontairement restreint par une abstraction préalable. Ainsi, nous jugerons un triangle comme complètement déterminé par ses 3 angles, si nous ne le comparons à aucune grandeur linéaire étrangère à lui. Il sera jugé déterminé par la connaissance de deux côtés et de l'angle inclus, 1 côté et 2 angles adjacents ou les 3 côtés, par rapport à une grandeur étrangère ; mais il ne sera pas encore situé. Pour le situer par rapport à un point, à un axe, à un plan, il faudra de nouvelles données ; enfin, on pourra situer ce triangle (dans la surface illimitée dont il constitue une portion par rapport aux autres figures de la surface). Mais, si on ne considère plus cette surface comme enfermant la totalité des positions possibles du triangle, la situation par rapport à un champ plus vaste exigera de nouvelles données pour être déterminée.

Nous distinguons ainsi, par rapport à une figure, des données qui déterminent sa structure et d'autres qui déterminent sa situation; les premières déterminent l'indivi-

dualité, les autres fixent les relations de l'individu avec le non-moi. Mais la réunion des caractères de ces deux espèces forme à son tour une figure plus complexe, une individualité nouvelle, dans laquelle les données de pure situation ou de relations externes sont devenues données de structure ou de constitution individuelle. Et cette synthèse présente deux cas distincts, suivant qu'elle maintient la nouvelle individualité dans le prolongement indéfini de la modalité spatiale à laquelle participe la figure primitive, ou suivant qu'elle empiète sur une modalité autre. Dans le premier cas, la figure complexe sera formée d'un nombre défini de figures élémentaires ayant toutes pour matière une même espèce d'étendue, et ne différant que par la limitation de cette matière. Elle répond à l'algorithme sommation. Dans le second cas, il se produit l'accession d'une matière nouvelle étrangère au champ qui constitue l'universalité ouverte à la figure considérée, il n'y a plus simple passage de l'élément à la complexité, mais de l'espèce au genre. Cela est irréalisable par sommation et correspond à l'algorithme graduation.

***

Ainsi, la détermination d'une figure et sa situation nous offrent trois champs de conception s'enveloppant : le plus restreint est celui de la définition individuelle ; ensuite, la détermination de ses relations avec le champ d'existence dont elle soustrait une partie pour s'individualiser ; enfin, la détermination de ses relations avec toutes les modalités concevables d'existence, modalités auxquelles elle ne soustrait rien pour s'individualiser, et

qu'elle affecte tout au plus d'une relation purement accidentelle par rapport à des entités plus concrètes.

Or, suivant l'étendue perçue ou assimilée par un sujet, l'individualité peut être attribuée à des entités plus ou moins abstraites. On voit que les catégories de mode, temps, lieu, relation, peuvent, suivant le point de vue, se transformer en degrés des catégories du genre et de l'espèce.

Réciproquement, on peut considérer une individualité comme la synthèse comprenant une individualité plus élémentaire réunie à ses relations modales. Ainsi, un triangle déterminé peut être envisagé comme une des situations occupées par 3 lignes définies en grandeur, mais mobiles. Le triangle n'est plus alors qu'une des modalités du système formé par 3 individualités d'ordre inférieur. Si, au contraire, on considère ce triangle comme l'intersection d'un trièdre ou d'un prisme triangulaire par un plan, par rapport à ce solide, le triangle ne sera qu'un accident, susceptible d'affecter des solides différents.

Ceci montre combien l'individualité est relative aux objets auxquels on la compare ; un même être étant individu d'une espèce, ou portion finie d'une individualité plus complexe, ou simple accident abstrait et universel applicable à plusieurs individualités d'ordre supérieur. La vie nous montre, dans le concret, l'application de ces 3 aspects nécessaires de la géométrie. Nous avons les monères ou individualités jugées élémentaires, les zoïdes ou êtres vivants, composés d'une pluralité d'organismes élémentaires ; enfin, il y a les divers degrés hiérarchiques de la vie marqués par l'accès de l'être dans des champs d'actions échelonnés : vie minérale, vie végé-

tative, vie animale, vie psychique, etc. La corrélation géométrique de cette hiérarchie de la vie avec la superposition des dimensions de l'espace,ou plus généralement des ordres spatiaux,se double d'une corrélation algorithmique. C'est dans ce dernier mode d'évolution, dans le développement hiérarchique, que se trouve la solution du transformisme, solution vainement cherchée dans les combinaisons d'organismes et d'ambiance d'un même ordre. L'étude de l'algorithme d'après Wronski nous éclairera ces questions, que je ne puis ici qu'indiquer pour bien faire sentir le lien étroit qui existe entre l'essence de l'espace et la nature de la vie : c'est là qu'est le nœud de tous les problèmes relatifs à la constitution de l'espace.

Retenons ici les principes suivants :

Situer une figure déterminée, c'est simplement *former une figure plus complexe réunissant la première et certains centres ;* et réciproquement, *déterminer une figure, c'est situer une figure plus élémentaire relativement indéterminée. L'individualité correspond au point de vue sous lequel un groupement est jugé complètement déterminé par rapport aux déterminations complémentaires qui relient cette individualité à son non-moi simultané. — L'indétermination générique correspond au point de vue sous lequel certains éléments d'un groupement peuvent avoir des situations multiples sans altérer la situation des autres.* — L'étude de ces conditions a donné lieu à une branche mathématique relativement récente : la théorie des groupes,que nous espérons étudier plus tard.

On voit donc qu'un même ensemble d'éléments peut être considéré soit comme appartenant à l'espace et déterminant une situation, soit comme rapports qualifiant

un individu et sortant pour ainsi dire de l'espace. Cela nous fait déjà pressentir la relativité de l'existence spatiale. On conçoit que l'espace est une sorte de masse alimentaire que les individualités intègrent et assimilent ; et par conséquent, les dimensions doivent, sinon s'évanouir, du moins se transformer par l'évolution des êtres plongés dans l'espace.

En outre, on saisit la connexion qui existe entre la modalité spatiale, le rapport du genre et de l'espèce, et celui de substance et d'accident, un même objet pouvant être substance, modalité, accident, groupe générique ou individu, suivant les objets auxquels on le compare.

Modes de génération des figures

On peut concevoir la génération des figures de plusieurs façons : 1° par assemblages d'éléments ; 2° par mouvement d'un élément ; 3° par intersection dans une figure ou par développement de cette figure.

***

L'assemblage d'éléments est assujetti à certaines conditions limitatives, ainsi que nous l'avons remarqué, mais ces conditions dépendent du milieu. Tout assemblage qui ne se résout pas en un simple prolongement ou fractionnement implique à la fois des longueurs et des directions. Les figures rectilignes sont le type pur de cette sorte de génération. A ce point de vue, les courbes sont considérées comme la limite vers laquelle tend une sommation infinie d'éléments angulaires. Et, pour que

cette limite soit atteinte dans une étendue finie, il faut que ces éléments en nombre infiniment grand soient considérés comme infiniment petits par rapport à l'étendue considérée.

De plus, la courbure rapportée à la ligne droite implique pluralité de direction, par conséquent, un élément linéaire courbe implique un milieu spatial de l'ordre immédiatement supérieur à celui de l'élément linéaire correspondant. Il s'exprimera par un rapport entre deux droites angulaires autrement dit par la tangente trigonométrique.

C'est ainsi que s'établit une combinaison de la rotation et de la translation dans la deuxième dimension. L'angulaison introduite dans la translation tend à réaliser des polygones, et ainsi, l'expansion indéfinie de la translation se trouve ramenée à un cycle irrégulier discontinu et à l'établissement d'un centre plus ou moins complexe. Et les rapports trigonométriques expriment les contrastes de direction en rapports de longueurs.

La courbure est donc considérée comme résultant d'une variation d'intensité dans le rapport de deux directions. La courbure correspond à une détermination spatiale qui se modifie au fur et à mesure de son accomplissement. Sa direction originaire implique une tendance à la variation, tendance exprimée par le rapport différentiel qui exprime l'essence de la courbe, tandis que la somme intégrale de tous les rapports différentiels manifeste l'évolution totale de la courbe. Les courbes correspondent donc à des individualités qui se développent et évoluent. Les éléments infinitésimaux qui, par leur synthèse, constituent une ligne sont identiques dans une droite, tandis qu'ils sont différenciés dans une courbe.

La synthèse curviligne se rapproche donc de celle de la vie, et on peut remarquer que les figures angulaires appartiennent au règne minéral, c'est-à-dire au moins vivant, tandis que la courbure est la loi universelle du monde organique. M. Grasset, dans sa théorie esthétique des formes, a du reste constaté cette loi.

Cela montre qu'un élément spatial sort de l'ordre spatial constitué par son propre développement indéfini dès qu'il est modifié dans son évolution. Ainsi, la *pluralité de dimensions a pour origine une altération dans l'impulsion d'un être.*

Mais on conçoit que, pour saisir cette déviation, il faut conserver la connaissance de la tendance primitive. Et ainsi, *une courbe ne se distingue d'une droite qu'à la condition de percevoir l'ordre spatial des surfaces.* Un être enfermé dans une courbe et ne percevant rien en dehors d'elle ne s'apercevrait pas de la courbure. Nous avons déjà remarqué cela à propos des géométries non euclidiennes. Et c'est sur cette considération que se fonde un des arguments principaux en faveur de la 4[e] dimension. Pour distinguer un espace courbe d'une espace euclidien, il faudrait pénétrer dans la 4[e] dimension, et, de ce point de vue, ces espaces peuvent coexister comme des corps limités ou illimités.

Nous pourrons négliger, dans l'étude des dimensions, la distinction entre les espaces euclidiens et non euclidiens. Il suffira de considérer que les éléments rectilinéaires dans un ordre partial déterminé sont ceux qui conservent une direction jugée invariable, et qui servent ainsi de base aux situations des autres éléments.

Au point de vue rectilinéaire, les figures géométriques sont considérées comme des combinaisons entre des indi-

vidualités isolées ; la pluralité de ces individualités implique, pour coexister, l'ordre spatial supérieur. La courbure correspond alors à une pluralité infinie de ces individualités se réduisant à une unité qui reste, par sa nature, du même ordre que les éléments rectilignes dont elle se compose, grâce à une réduction des longueurs corrélative à la pluralité des éléments. La courbure participe donc à deux ordres spatiaux entre lesquels elle sert de transition : elle élève l'élément linéaire correspondant dans le milieu spatial supérieur en réalisant dans le fini le développement indéfini d'une sommation de lignes ne coïncidant pas. Et la vie est sans doute quelque chose d'analogue ; et c'est en elle qu'il faut probablement chercher cette quatrième dimension dont elle doit présenter la condensation, dimension nécessitée comme contenant de la vie, bien que non réalisée consciemment pour nous.

On voit aussi qu'un élément rectiligne peut être considéré comme l'élément infinitésimal d'une courbe et, par conséquent, que la droite et le plan de l'infini euclidien se confondent avec l'horicycle et l'horisphère non euclidiennes.

***

La génération d'une figure par mouvement d'un élément a pour caractère fondamental de transformer l'unité originaire en une unité d'ordre supérieur. Cette unité nommée génératrice est l'élément originaire répété à l'infini, suivant une directrice qui est souvent une autre unité du même ordre que la génératrice. Cette génération est essentiellement continue, à l'inverse de la

précédente, qui est discontinue dans son principe. Nous venons de voir que la courbure est, par rapport à la génération par assemblage, la limite où cette génération atteint la continuité; ici, au contaire, c'est la courbure qui est le principe, et, à ce point de vue, on a pu construire une géométrie où les lignes droites ne sont que des éléments différentiels de courbe, autrement dit des courbes d'un ordre supérieur par rapport à l'ensemble considéré. Tandis que la génération par assemblage répond à l'algorithme sommation, la génération par mouvement d'un élément répond à l'algorithme graduation. Elle opère continuellement et comme par ascension à travers les ordres spaciaux.

Or la génération des dimensions de l'espace est un cas particulier de cette génération par mouvement: celui où les génératrices et les directrices sont considérées comme rectilignes. *La notion d'une dimension supérieure à celle que possède un élément dans sa structure correspond ainsi à la synthèse de cette structure avec son champ d'activité externe.* Ce caractère dynamique impliqué dans la notion de dimensions, nous aidera à élucider le problème des *n* dimensions.

La génération par mouvement d'un élément, continue dans son principe, peut tendre vers la discontinuité et l'angulaison par divers degrés, depuis les inflexions jusqu'aux points acnodaux (dépressions), cardioïdes (rebroussements) et cuspidaux (boucles).

***

Enfin, le 3e mode de génération des figures est celui des intersections et, plus généralement, des projections

et des développements. Ce mode est, sous son double aspect, une régression des deux autres. Il produit généralement des figures d'un ordre inférieur à celui des figures originaires, et jamais d'un ordre supérieur. Cette génération présente les figures géométriques comme le résultat d'une limitation réciproque de deux individualités; elle définit l'individualité par ses bornes. Par rapport aux éléments d'un ordre spatial déterminé (par ex., à des volumes), les éléments d'ordre inférieur résultant de leurs intersections ou projections (par ex., des surfaces) ne sont que des aspects, des accidents sans réalité individuelles, de pures abstractions. A ce point de vue, les dimensions de l'espace seraient des degrés d'abstraction limitant la réalité concrète. Nos 3 dimensions seraient donc 3 degrés bornant notre perception des formes.

***

Une figure donnée peut avoir pour principe l'un des trois modes générateurs indiqués. Aussi, la possibilité de considérer des volumes comme l'intersection qui donneraient des formes à 4 dimensions dans un espace à 3 dimensions ne suffit pas pour affirmer la réalité de cette 4e dimension.

Mais il est fort possible que, parmi les diverses figures de notre espace réalisable par ces 3 modes de génération, certaines aient leur principe essentiel dans l'assemblage, d'autres dans le mouvement d'un élément, d'autres dans l'intersection ou la projection, et que les autres modes de les produire soient des artifices imparfaits et stériles.

Par exemple, il est évident que la circonférence dérive plus naturellement de la révolution du rayon au-

tour d'un centre que d'un tracé par l'accumulation de points équidistants de ce centre. Par contre, la définition de la circonférence par l'équidistance de ses points par rapport au centre exprime mieux l'idéal réalisé par l'action du tracé continu.

Ainsi, l'équation d'une courbe et son tracé par points manifestent plutôt l'idéal nécessaire que l'acte réalisé en s'accomplissant ; le tracé continu indique plutôt commentleproblème posé par cet idéal peut s'accomplir.

Le cercle envisagé comme intersection plane d'une sphère correspond au processus régressif et analytique qui dissocie une réalité concrète pour la rendre intelligible à un milieu mental inférieur.

Le problème des n dimensions de l'espace se rattache donc à cette question : *Les formes géométriques et les dimensions qui en sont les axes sont-elles des constructions s'élevant sur les éléments abstraits de la grandeur, ou bien des abstractions d'êtres concrets et existants par delà les espaces*, « des intersections de l'esprit »,comme le dit M. Boucher ? En un mot, la forme géométrique est elle le résultat d'une involution descendant du concret vers l'abstrait, ou une évolution s'élevant de l'abstrait vers le concret ? L'un et l'autre sans doute, en vertu de ce double mouvement universel d'involution de l'esprit dans la matière et d'évolution de la matière vers l'esprit. C'est toujours l'échelle de Jacob ou la double spirale des Chinois.

Ce qui est construction par rapport à un milieu est généralement destruction ou au moins soustraction par rapport à un autre. Ainsi, quand nous construisons une figure, cette figure réalisée tranche sans doute dans une forme supérieure. Si j'assemble 3 lignes dans l'espace, je

crée une intersection par rapport à la colonne prismatique idéale ou réelle que traverse ce triangle. J'assimile quelque chose de la forme à 3 dimensions, par le seul fait que je construis une forme à 2 dimensions au moyen d'éléments de la première dimension. Du point de vue que j'occupe, le triangle dérive d'un procédé de construction, mais pour l'être matériel ou mental auquel appartient le prisme intersecté, ce triangle sera un accident empruntant son être à l'intersection établie. Or notre existence matérielle et mentale nous révèle 3 dimensions. Notre faculté d'abstraire et la possibilité de nous absorber (tantôt dans une pure translation rectiligne, quand nous poursuivons un but ; tantôt dans la pure superficie, quand nous contemplons ; tantôt dans la triplicité de dimensions, quand nous agissons à la fois par progression et par circonvolution) nous permettent de prendre notre point de départ, suivant les cas, dans l'un des trois ordres spatiaux qui nous sont accessibles, et par là, de considérer une même forme comme provenant de l'un des trois processus fondamentaux. Mais il est fort possible que chaque forme procède plus directement de l'un ou de l'autre. Par exemple, l'idée ou la réalisation du dodécaèdre provient peut-être directement d'une influence mentale ou d'une forme matérielle de la quatrième dimension intersectée par nos actes mentaux ou matériels, tandis que sa construction, assez difficile, n'est qu'un processus artificiel dû à la réflexion de l'influence de la forme à 4 dimensions dans notre esprit. Au contraire, le tétraèdre régulier semble être conçu intuitivement comme dérivant du triangle : il appartiendrait ainsi, dans la génération des formes au courant ascensionnel et constructeur par rapport à l'espace à 3 dimensions. Cela expliquerait pourquoi la

série tétraédrique des polyèdres réguliers se poursuit indéfiniment d'après nos géométries, à N dimensions, tandis que la série du dodécaèdre s'arrête avec le 120 édroïde dans la 4e dimension. Peut-être sommes-nous là en présence d'une intersection de forme inaccessible qui arrête le processus constructif et artificiel. C'est peut-être à ces différences de principiation métaphysique que tiennent les propriétés plus ou moins remarquables de certaines figures. Il est certain que le triangle et le carré sont, dans notre espace, beaucoup mieux adaptés, beaucoup plus souples que le pentagone, et peut-être, dans la quatrième dimension, perdraient-ils cette suprématie.

Conception par Rotation ou Translation

Les notions spatiales se ramènent à la combinaison des données de la rotation et de la translation. — Pour un être privé de translation et doué de rotation, l'espace consisterait en un contenant divisé en zones concentriques d'intensité décroissante avec la distance, et en secteurs résultant des contrastes établis par les objets ou par les intensités de rotation nécessaires pour amener un objet à la place d'un autre. Il n'y aurait aucune notion des dimensions dans un tel espace, mais seulement des directions contrastant plus ou moins. Cet espace serait un point étendu, cercle, sphère ou hypersphère, estimé homogène en soi et divisé par des contrastes de directions déterminées soit par les objets contenus, soit par les mouvements du sujet. Cet espace serait conçu comme une totalité divisible, puisque les contrastes, après avoir passé

par certains maximum, ramèneraient périodiquement les situations primitives par une progression continue.

Dans un tel espace, toute distance serait estimée par l'arc, qui est une fraction du cycle total, avec une intensité variant avec la profondeur. Cela suffit pour établir des coordonnées polaires, le module étant considéré comme un facteur d'intensité, sans idée de longueur.

— Un être doué de translation et privé de rotation ramènerait au contraire toute chose à l'idée de distance. Les changements de directions seraient perçus par lui comme des chocs, autrement dit, comme des intensités, et se distingueraient en outre par les qualités des objets rencontrés. Pour lui, l'espace ne serait pas une totalité, mais une capacité sans bornes, avec virtualité ouverte à la multiplicité d'éléments qui sont considérés non comme des fractions d'un tout, mais comme des individualités distinctes. Si les contrastes passaient par des maxima, ces maxima seraient saisis comme de pures différences de qualités, et un retour au point de départ serait estimé comme un nouveau lieu ressemblant absolument au premier. Les directions seraient alors déterminées par l'intensité ou le nombre de certains chocs séparant certaines distances. Cela permettrait d'établir des coordonnées axiales avec un angle convenu et connu seulement comme une certaine qualité. Un tel espace n'aurait pas de dimensions véritables. On y remarquerait seulement que, suivant les cas, un point se trouve déterminé par un nombre plus ou moins grand de qualités n'ayant entre elles aucune commune mesure.

Si un être ne concevant que des translations parcourt un cycle, il considérera comme une pluralité d'individus similaires l'unique objet rencontré après chaque réitéra-

tion du même cycle.. — Inversement, si un être ne concevant que des rotations se meut sur une ligne indéfiniment prolongée,et si le long de ce parcours, une même séquence se reproduit périodiquement, cet être croira à chaque période être revenu au point de départ,et il considérera comme une individualité unique plusieurs fois perçue la pluralité d'individus similaires.

***

Ceci prouve combien est relative l'individualité que nous attribuons aux objets. Elle n'appartient pas, à proprement parler,aux objets,mais dépend du sujet qui la perçoit. On voit aussi combien est relative la pluralité d'individus similaires qui répond à la notion d'espace, et à quel point les réalistes au moyen âge avaient raison d'attribuer autant de réalité aux universaux qu'aux objets particuliers. Nous avons expliqué précédemment le sens métaphysique de la translation et de la rotation en définissant la translation : *une fonction du sujet comme unité par rapport au non-moi ;* et la rotation : *une intégration de collectivités partielles au sein du sujet amenant un changement de relations avec le non-moi.* Or, suivant qu'un sujet est doué de translation ou de rotation, il substitue la pluralité à l'unité ou inversement. La distance et l'étendue sont donc relatives, et là où une distance existe pour un être doué de translation, il n'y a qu'un mouvement sur place pour un être doué de rotation. Ainsi, un être doué de rotation, j'entends rotation pure, mouvement de pivot et non révolution circulaire) percevra, toutes autres choses égales, une dimension de moins qu'un être doué de translation. Cette restriction

dimensionnelle a pour corrélation une restriction dans la pluralité des individualités. On peut rapprocher ce fait de celui qui attribue plusieurs perceptions similaires à un même objet, la mémoire équivalant, au point de vue de la conscience psycholgique, à un mouvement de rotation.

Par conséquent, si toutes nos translations se trouvaient ramenées à des rotations, autrement dit, si au lieu de parcourir l'espace, nous pouvions l'envelopper autour de nous et l'explorer en pivotant sur place, bien des pluralités s'identifieraient dans une individualité unique répondant à la collectivité que nous nommons espèce. Inversement, ce que nous considérons comme individualité deviendrait collectivité si nos rotations se transformaient en translation.

Cela fait déjà pressentir où se trouvent les dimensions qui dépassent la 3[e] ou qui sont en deçà de la première. Ainsi, la transformation de la translation en rotation et vice versa fait apparaître ou évanouir une dimension, et en même temps une pluralité (1). Le problème de l'espèce et de l'individualité se trouve ainsi lié à celui des dimensions de l'espace.

---

(1) La sous-dimension correspondrait donc aux choses que nous percevons par rotation (?)

CHAPITRE II

Les Dimensions

Analyse de la Notion de Dimension

Une dimension est une longueur dirigée dont le rapport à une unité choisie contribue à déterminer une figure géométrique. Au premier abord, on sera tenté de considérer comme dimension toutes lignes principales d'une figure : côtés d'un polygone, diagonales, axes principaux d'une courbe, etc. Mais, la finalité même qui définit la notion de dimension étant de déterminer la figure, on cessera naturellement de considérer comme dimensions les lignes, si évidentes qu'elles soient, qui ne contribuent pas à atteindre cette détermination ou qui apportent des données surabondantes pour cette détermination. Peu à peu, l'observation a amené l'homme à choisir pour étalons des figures très simples dont il détermine la situation, et toutes les autres figures ont été déterminées en mesurant la situation des points nécessaires à connaître par rapport à ces figures étalons : ces figures sont les systèmes de coordonnées. Les mathématiques ont découvert, dans ces derniers temps, un grand nombre de systèmes de coordonnées; mais il en est un (sans doute le plus ancien) qui semble tiré plus naturellement de nos

conditions d'existence,et qui a été intuitivement employé dans la pratique de la vie bien avant que Descartes ait fondé sur lui la géométrie analytique : c'est le système de 3 axes rectangulaires (vertical, transversal et antéro-postérieur,) découlant de la structure de l'homme, dont le corps est symétrique, suivant un plan vertical situé dans la direction normale de sa locomotion et de sa vision. Ce même caractère, dans sa généralisation géométrique, correspond au maximum de contraste simultané au sein d'une variété spatiale, maximum marqué par la perpendicularité. Or la perpendicularité ne peut se développer que par des lignes planes et droites : chaque variété dimensionnelle sera donc une figure rectiligne : ligne plan, cube indéfini, etc.

L'idée de dimension repose donc sur le maximum de contraste entre des variétés spatiales, et autant de fois on peut superposer ce maximum de contraste, autant une variété spatiale contient de dimensions. Il suit de là que la réitération d'un même facteur se combinant au résultat de l'opération précédente qu'il a réalisé lui-même, autrement dit l'algorithme des puissances, est l'expression exacte du développement de l'étendue par les dimensions. Celles-ci sont les exposants ou les logarithmes de la quantité qui exprime la capacité des ordres spatiaux correspondants. Pour la même raison, tout lieu géométrique composé d'éléments plans ou rectilignes s'exprimera par des fonctions homogènes du premier degré; car chaque monôme de la fonction exprimera une seule dimension et le polynôme qui constitue la fonction homogène représente l'analyse, c'est-à-dire, l'isolement de ces directions contrastantes qui constituent les dimensions.

***

La distinction des 3 dimensions repose sur le contraste 2 fois superposé de la perpendicularité dû à nos conditions d'existence. Dans un même milieu, des êtres construits, d'après une structure symétrique, autour d'un axe (ou autour d'un point) n'auraient vraisemblablement que la notion de deux (ou d'une seule) dimensions, associées, comme elles le sont pour nous, à l'idée de rotation. Ainsi, le cyclope, avec son œil formé par la glande pinéale au sommet du crâne concevrait difficilement notre espace comme ayant deux ou trois dimensions, surtout s'il avait pour pieds des roulettes, et pour bras des tentacules attachés comme l'humérus, c'est-à-dire pouvant décrire des cônes de divers angles autour de son point d'attache.

Je ne parle pas ici d'êtres superficiels, assujettis à se mouvoir seulement dans un plan et tels que le sont à peu près les hydromètres, ces araignées qui se meuvent à la surface des rivières. Pour ces animaux, sans doute, il n'existe qu'un espace à 2 dimensions. Mais un être se mouvant réellement dans un espace à 3 dimensions pourra ne pas discerner cette triple mensuration, si, dans son organisation, aucun contraste ne vient les distinguer nettement. Ainsi, un être cylindrique ou conique ne connaîtrait spontanément que 2 dimensions ; la 2e étant parcourue inconsciemment suivant des lignes courbes et répondant aux géométries non euclidiennes. Un être parallélépipédique comme nous distingue les 3 dimensions, parce qu'il perçoit aisément les contrastes entre elles. L'inégalité continue, provenant d'un profil

elliptique serait perçue comme une accélération dans la rotation. Donc, une variété de même dimension pourra passer subjectivement perçue ou inaperçue, suivant que l'être percevant sera différencié ou non d'une manière discontinue, suivant cette dimension. Il est donc possible que notre structure organique participe de la 4e dimension, mais qu'étant symétrique axialement par rapport à cette 4e dimension, nous la percevions seulement comme variation d'intensité de volume.

On voit aussi que, pour prendre conscience d'une dimension, il faut être polarisé suivant cette dimension Et peut-être la 4e dimension est-elle celle suivant laquelle notre polarisation est encore incertaine. Nous avons une image d'une telle condition, par rapport à la 3° et même à la 2e dimension dans l'état cosmique de ces tourbillons dont la rotation n'obéit pas encore à un plan fixe, et dans ces sphères en formation n'ayant pas encore de pôles stables. Les librations des mouvements astronomiques semblent montrer que notre système solaire tout au moins n'a pas atteint la stabilité complète suivant les 3 dimensions.

Il semble que la double vue, la claire audience, enfin, cet état sensoriel accessible à certains sujets exceptionnels doués d'une sorte de perception intérieure du monde objectif, soient des ébauches de cette prescience emencore embryonnaire de la 4e dimension.

***

L'idée de dimension implique à la fois une longueur et une direction, donc une translation et une rotation combinées. Elle implique un contraste, mais en même

temps une continuité permettant de relier les éléments de contraste,et de les rapporter à une commune mesure. Sans cela, les directions diverses seraient jugées comme de pures qualités,incomparables entre elles sous le rapport de la grandeur spatiale.

Cette continuité qui relie les directions contrastantes peut être considérée comme un espace capable de contenir toutes les directions intermédiaires, mais évalué avec d'autres unités. Ce point de vue répond aux coordonnées cartésiennes, qui impliquent des axes et des angles convenus. Mais on peut relier les directions contrastantes par une nouvelle longueur dont la direction dépendra des directions précédentes, et établira entre elles le lien de continuité nécessaire. On a alors une coordonnée de plus, remplaçant l'angle convenu ; ce sont alors les coordonnées trilinéaires.

Il ne faut sans doute pas remonter bien loin pour trouver l'origine de la notion de dimension. Il est fort à croire que le contraste entre la verticale et les 2 dimensions horizontales a dû longtemps paraître irréductible. Les gens incultes de nos jours présentent encore à notre époque un état mental peu enclin à embrasser sous le concept de dimensions les 3 directions perpendiculaires de notre milieu. Sans l'architecture, qui, avec la taille des matériaux, en est arrivée à découvrir le privilège du trièdre droit de pouvoir se retourner dans les trois directions, la notion des 3 dimensions serait beaucoup moins claire, tant la pesanteur crée une différence d'effort et de situation partout où intervient la verticale, et tant la cohésion distingue par un effort intense toute perforation d'avec les parcours superficiels ou linéaires. Il suffit donc d'un manque de lien, entre les 3 dimensions

et un nouveau contraste spatial, pour nous empêcher de le concevoir comme une 4e dimension et pour le percevoir comme pure qualité. Et peut-être l'évolution objective de notre milieu ou l'évolution subjective de la peception humaine, suivant le pressentiment de M. Poincaré, nous découvrira-t-elle un jour cette 4e dimension quand nous pourrons relier continûment aux 3 autres le contraste qu'elle fait avec elles.

D'une manière générale, *percevoir une dimension, c'est réduire une différenciation qualitative à une mesure de quantité spatiale*, c'est-à-dire *à une grandeur dirigée.* Mais il ne suffit pas d'avoir déterminé la mesure d'une qualité quelconque pour l'assimiler à une dimension : des coefficients de dilatation, des indices de réfraction, etc, ne peuvent être envisagés comme des dimensions tant qu'on n'aura pas découvert la continuité qui permet leur transformation ou leur évanouissement graduel dans une de nos dimensions connues. Il ne suffit donc pas de poser une variable de plus dans une équation pour la nommer dimension. Faute d'observer cette double condition de contraste et de continuité pour qualifier un élément quantitatif de dimension, on tombe dans l'incohérent, la géométrie se confond avec l'algèbre, et n'a plus l'espace pour objet propre.

Ce qui constitue une dimension pour un sujet, c'est *la perception d'un contraste au sein d'une continuité spatiale.* Une variété spatiale d'un certain ordre est la continuité permettant de relier en passant par un contraste maximum les éléments d'une discontinuité. Et toute discontinuité n'est sans doute que l'intersection, dans un champ restreint d une continuité plus concrète. Ainsi, la surface relie la discontinuité de 2 lignes, et une ligne peut être considérée comme la trace d'une surface.

C'est là une application du principe métaphysique qui concilie les oppositions dans une synthèse supérieure, et qui résout l'antagonisme des contradictions dans un infini par rapport aux éléments contradictoires, infini qui, vu d'un point de vue supérieur, n'est qu'une continuité.

Développement des Dimensions

On peut se demander si la superposition des contrastes qui établit de nouvelles dimensions peut se poursuivre indéfiniment. Nous venons de voir qu'il n'y a pas dimension sans une continuité corrélative du contraste. Or la continuité peut-elle se poursuivre indéfiniment en expansion indéfinie; ou bien tend-elle à faire prédominer la rotation et par là à effacer les dimensions nouvelles dans l'homogénéité ?

La translation, se superposant à elle-même sans limite, correspond à la fonction des puissances entières dont le développement est illimité. Dans la translation la ligne de base, dans toute son étendue, devient centre ou plutôt axe de la surface ; elle n'a plus de point d'origine. Le point unique qui, dans la rotation est la racine de la 2e dimension par l'intermédiaire de l'infinité linéaire, disparaît ici; la centralisation ponctuelle se multiplie à l'infini et devient une centralisation axiale.

Dans le développement par rotation, le centre persiste à travers tous les degrés et limite l'expansion indéfinie suivant les directions contrastantes, pour lui substituer une expansion homogène. L'action du générateur demeure liée à la racine dont il représente le développe-

ment universel, son expansion est refrénée par l'individualité persistante de la racine.

Dans le développement par translation au contraire, c'est une ascension du générateur à une individualité d'ordre supérieur où l'individualité primitive disparaît dans l'universalité acquise qui constitue justement l'individualité supérieure. Et l'unité génératrice se meut sans contrainte de sa racine, celle-ci perdant son unité propre d'élément pour s'émietter en infiniment petits.

Entre ces deux types extrêmes des développements par rotation et par translation se trouvent une masse de cas où les 2 processus se combinent. Ainsi, des rotations imparfaites réaliseront les sections coniques, des multiplicités de centres échelonnés sur une translation donneront lieu aux coubes des divers degrés.

Dans la 3e dimension, la persistance du point comme centre réalise la sphère avec la plan, le cône avec la ligne ; la persistance de la ligne avec le plan donne le cylindre. On peut remarquer que la rotation d'un plan ou celle d'une ligne autour d'un point réalisent l'une et l'autre des volumes, c'est-à-dire des formes du même ordre, bien que l'ordre du plan soit supérieur à celui de la ligne. Cela tendrait à prouver qu'avec la persistance de l'influence centralisatrice, on ne peut, avec des éléments de l'ordre surface, dépasser l'ordre volume.

Au contraire, si l'on suppose un développement par translation, chaque translation nouvelle contrastant avec la précédente réalisera une variété d'ordre supérieur.

Il serait intéressant de rechercher dans l'univers ces deux sortes de génération dont la géométrie montre les schémas. Les êtres vivants semblent les retracer. Cer-

tains organes ayant pour origine une cellule centrale prolifèrent autour d'elle et restent toujours centrés ; tels sont en général les glandes en grappes, les viscères principaux ; d'autres, au contraire, se forment d'une accumulation de cellules dont l'individualité s'efface dans une unité supérieure ; par exemple, les fibres musculaires, les nerfs, les vaisseaux appartiennent à ce type avec des variantes diverses.

La sociologie et l'esthétique fournissent aussi des exemples de ces deux genres de hiérarchie : tantôt, l'individu persiste dans les groupements, au sommet ou à la base de la hiérarchie; tantôt plusieurs individus se fondent dans une idée anonyme qui est le véritable chef.

On peut se demander s'il n'existe pas une contre-partie de l'influence frénatrice de la centralisation. Et le processus dispersif que nous avons rencontré dans les géométries non euclidiennes, comme formant l'opposition du processus convergent se retrouve naturellement ici à propos de la question des dimensions. Et en face de π se présente le facteur e qui préside aux fonctions hyperboliques formant, avec les fonctions circulaires, une antithèse dont le moyen terme est la formation quadratique.

Je remets à plus loin l'étude de ces 3 modes de génération par π, par e et par graduation : c'est une question trop importante pour être traitée incidemment. Constatons seulement ici que la constitution hyperbolique d'une variété spatiale tend à aspirer vers l'infini son contenu au lieu de legrouper autour d'un centre, et, que cette aspiration se résume en deux directions doubles, tout comme la structure quadratique et la structure trigonométrique, dont l'extrême est représentée par le triangle rectangle et répond à $\sqrt{2}$, nombre sur lequel π est cons-

truit. Le nombre e répond ainsi à l'évanouissement d'une variété dimensionnelle en vidant le genre de ce qui lui confère une réalité individuelle, pour ne lui laisser que ses principes radicaux, orientés maintenant (asymptotes) de façon à neutraliser l'orientation primitive.

Ceci tend à montrer que le développement des dimensions, bien qu'étant possible indéfiniment, doit être en fait limité par les deux facteurs e et π : π empêchant la translation de multiplier les espaces indéfinis et leur imposant, dans une certaine mesure, une centralisation relative qui restreint l'infinie prolifération et établit des cycles ; e empêchant la superposition de plus en plus dense d'une hiérarchie écrasante, en sublimant sa matérialité et en réduisant à des tendances vers l'équilibre quaternaire infini l'effort de la constructivité hiérarchique.

Or, en nous rappelant l'étude sur les géométries non euclidiennes, nous voyons que, dans la sphère physique, e répond à l'expanion des gaz et à l'idéation ; il nous offre donc la porte de sortie de l'espace, la solution de cet équilibre provisoire établi pour enrayer le chaos ; π géométrise les liquides, état qui est le point de départ indifférencié entre les gaz et les solides. Et, tandis que le gaz tend à émanciper le mouvement, le solide établit une stabilité enrayant l'agitation désordonnée. Le liquide, comme élément neutre, fournira par son universalisation la parité coronale du système, c'est-à-dire l'animal, ainsi que nous l'avons vu déjà (1).

Or l'équilibre mobile de notre monde repose sur la

---

(1) Voir la Synthèse Concrète (Chapitre Ier et appendice).

combinaison des 3 états : solide, liquide et gazeux, et sans doute, l'espace lui-même repose sur la triple géométrie : l'euclidienne servant de base aux deux autres, l'une, la Riemannienne, tendant à contracter les dimensions, l'autre, celle de Lobatschewsky, à les disperser. On peut donc se demander si le nombre trois, qui correspond aux dimensions de notre espace, n'est pas une condition même du maintien de cet équilibre entre les individualités qui coexistent séparément, et si l'établissement d'une 4[e] dimension ou l'élimination d'une 3[e] correspondraient à deux états réalisables sans détruire la possibilité des coexistences individuelles séparées qui constituent l'essence de la notion d'espace. On peut se demander si la suppression de la 3[e] dimension ne ramènerait pas la pluralité d'individus à se confondre en une seule individualité plus confuse et chaotique, à un milieu d'instinct borné ; si la réduction à une seule dimension ne serait pas l'évanouissement même de toute conglomération d'énergie et l'état d'impulsion aveugle et unique; enfin, si la réduction au point ne représenterait pas le germe pur du désir impuissant à l'acte, plongé dans l'angoisse infernale dont parle J. Boehme. Et, d'autre part on peut penser que l'établissement de la quatrième dimension ne pourrait se faire sans dissoudre cette résistance qui constitue l'individualité matérielle, sans transformer cette obscure limite de la connaissance que nous oppose les corps. La distinction individuelle qui pourrait persister ne nous est présentement concevable que comme le foyer d'une personnalité dont la corporéité ne serait plus qu'un domaine pénétrable à tous et caractérisé par un ordre déterminé, dont les 4 dimensions constitueraient le rythme. Le désir de l'amour conjugal semble être la

prescience confuse de cet état dont la 4e dimension représenterait la conscience clairement spécifiée. La musique, par sa suggestion, nous donne aussi un avant-goût intellectuel de cette pénétration des corps. Or cette pénétration nous est concevable plutôt encore comme une unification que comme une distinction. Le quaternaire des dimensions serait peut-être au point de vue de l'espace, la perfection d'une évolution vers laquelle il tend, l'unification qui parfait la distinction intellectuelle caractéristique du ternaire.

Ainsi, on peut concevoir l'établissement de la 4e dimension à deux points de vue : 1° subjectivement, en supposant que des êtres placés déjà dans un espace à 4 dimensions ne prennent que successivement conscience de chacune; l'humanité, en possession de la 3e depuis quelques milliers d'années, commencerait à entrevoir cette quatrième dimension ; 2° objectivement, en supposant la même évolution dans un kosmos déterminé, qui, sortant du chaos se développe successivement suivant les 4 dimensions. En définitive, subjectivité et objectivité n'étant que des points de vue relatifs, le kosmos acquérant les 4 dimensions peut, à son tour, être considéré comme prenant simplement conscience d'une virtualité au sein de laquelle il plongeait dès son origine.

***

Peut-on maintenant poursuivre indéfiniment la sériation des dimensions ainsi que tendrait à l'établir la géométrie analytique ? Ou bien la superposition de nouvelles dimensions aboutit-elle à supprimer l'espace, c'est-à-dire ce mode de coexistences individuelles distinctes

et ce mode de pluralité d'une même forme. Les équations qui expriment chaque dimension par une variable se prêtent à leur accumulation indéfinie. Mais cette possibilité algébrique ne peut nous renseigner sur la possibilité métaphysique. Elle considère une virtualité abstraite,et toute virtualité de ce genre est,par sa nature même,illimitée, car se dépouillant de la qualité,elle ne conserve que la quantité pure, qui, nous l'avons vu, est ce qui demeure indéterminé dans la pénétration incomplète de la matière par l'esprit. Mais,comme toute réalité concrète, est, suivant les principes de Wronski, pour le moins une synthèse ternaire d'éléments radicaux qui ne peuvent exister que l'un par l'autre, toute existence concrète définit une quantité en lui appliquant une tendance qualitative.

De là, une première détermination : les nombres, sorte de qualités à l'état de germe. Le développement spatial de ces germes constitue ce qui distingue les individualités similaires ; ce sont les dimentions spatiales. C'est par les dimensions qu'il est possible d'obtenir à la fois la distinction individuelle des formes et la répétition numérique d'une même forme.Et,puisque les dimensions dérivent des nombres, il doit y avoir des degrés dans leur collectivité jouissant de propriétés particulièrement remarquables de même que pour les nombres. La possibilité d'accumuler indéfiniment les variables dans une équation ne permet pas de conclure à la possibilité de superposer indéfiniment des dimensions, pas plus que la possibilité d'additionner indéfiniment des nombres ne permet de superposer indéfiniment des pierres sur une base donnée. La dimension possède en quelque sorte une masse; c'est une sorte de tension qui s'oppose à la conjonction

des individualités, et il est extrêmement probable que le jeu combinatoire de ces diverses tensions entraîne une limitation dans leur nombre. La sélection des polyèdres réguliers en est la preuve.

Qualité et Relativité des Dimensions

Puisque la transformation d'une translation en rotation suffit à déplacer l'individuel et l'universel, puisque la considération d'un groupe plus ou moins complexe suffit à extraire de l'individualité certains caractères pour les attribuer à l'espace, et vice versa ; puisque, enfin, l'individualité se déploie avec l'ordre spatial ambiant, on voit combien sont relatives la constitution et la nature d'un espace (1). L'espace peut être considéré soit comme une virtualité universelle, soit comme une forme individuelle. Une même étendue peut être considérée comme un espace ou comme une figure.

C'est d'après ce principe que certains géomètres ont considéré les espaces non euclidiens comme des variétés diverses de formes à quatre dimensions. Et nous avons vu, du reste, que ces espaces équivalaient à des milieux affectés d'un influence altérant les directions, influence qui peut se concevoir comme une force quant au mouvement, comme une forme quant à l'inertie. Ces espaces équivalent donc à des formes ayant une courbure de plus

---

(1) Ces trois modes de déplacement de l'individualité correspondent aux trois algorithmes fondamentaux : le premier, à l'algorithme neutre de reproduction ; le deuxième, à celui de sommation ; le troisième, à celui de graduation.

que les surfaces gauches. Et, comme toute courbure ne peut se définir qu'avec une dimension de plus que l'élément rectiligne du même ordre, on conçoit qu'une courbure de l'ordre volume soit pour nous irréprésentable géométriquement.

A l'extrême opposé,on peut concevoir un point courbe. C'est le point imaginaire représenté par la relation additive de deux termes de qualité hétérogène. Ce point complexe ou courbe peut être conçu comme synthétisant l'opposition du + et du — au sein du point ; sa polarité demeure virtuelle, et ne peut se réaliser que dans la première dimension.

Ainsi, un même objet est un espace illimité, un corps fini ou un infiniment petit, suivant que le champ de perception correspond à un ordre supérieur, égal ou inférieur. Nous avons observé plus haut que l'homme, à raison de la diversité de ses sens, peut se placer dans trois ordres différents : la ligne, la surface, le volume ; de là la notion synthétique qu'il construit de l'espace avec trois dimensions.

La question des *n* dimensions présente ainsi plusieurs aspects. On peut concevoir un champ de perception embrassant plus de trois ordres spatiaux,et se demander si l'homme un jour pourrait acquérir cette extension de données spatiales, sans perdre celles qu'il a. On peut concevoir, au contraire, la notion même d'espace comme liée au ternaire de dimensions, si l'élévation du champ perceptif à un ordre supérieur entraîne sa suppression dans l'ordre inférieur. S'il en était ainsi, le ternaire des dimensions se transporterait avec le sujet, un même objet étant, suivant la situation d'un sujet, simple point ligne, surface, volume, etc.

On peut aussi se demander si, une n^{e} dimension étant possible, il existe un nombre maximum de dimensions correspondant à la pleine connaissance de l'espace, que l'homme atteindrait progressivement à travers diverses étapes évolutives.

Dans tous les cas, nous pouvons nous demander quelle est la relation, par rapport à l'espace, de ce qui est pour nous en deçà de la ligne, et même du point, ou au delà du volume et si, parmi nos perceptions échappant à une localisation spatiale, mais connues ou senties comme une certaine qualité des objets extérieurs, on peut pressentir ce qui correspondrait à la quatrième dimension ou aux supra-dimensions, et, d'autre part, aux infra-dimensions (que ces données soient susceptibles d'être intégrées dans un espace plus complexe que le nôtre, ou qu'elles soient des modalités bornant et enserrant tout l'espace dans sa plénitude).

On a montré comment une variation de poids se manifeste sur une surface par une pression occasionnant une déformation de la figure intersectée par le volume pesant. On a conclu de là que nos perceptions de pression et de dilatation et, en un mot, tout ce qui affecte la masse, pouvait provenir de variation d'hypervolumes intersectés par des volumes. C'est donc la masse qui semble répondre à cette quatrième dimension. S'il en était ainsi, pour des êtres doués de la 4e dimension, les corps ne pèseraient pas ; ils seraient des figures géométriques se mouvant à travers cette 4e dimension. Et peut-être l'instinct de l'amour, rêvant la fusion des conjoints en un seul être, n'est-il que le vague pressentiment de la possession de cette quatrième dimension, qui permettrait la pénétration des corps, sans neutraliser la polarité des deux individualités conjointes.

La perception d'une dimension de plus nous apparaît ainsi comme une émancipation dans la limitation individuelle. Cette quatrième dimension paraît répondre à ce qui pèse sur nous, ce qui nous condense en corps pesant fixé au sol, restreint dans sa libre expansion. La possession de cette quatrième dimension permettrait de pénétrer les volumes,qui deviendraient pour nous ce que sont les surfaces et les lignes, c'est-à-dire de pures limites abstraites, des accidents. Mais en l'état actuel, la quatrième dimension représente la matière, c'est-à-dire ce qui nous limite, ce qui pèse sur nous comme contrainte. Les ordres spatiaux répondant à nos trois dimensions représentent le domaine exploré analytiquement par notre intelligence, la région des êtres que nous sommes en train de redistribuer mentalement pour nous les assimiler, et les trois dimensions représentent trois degrés de cette espèce de digestion cérébrale. Ce qui est parfaitement assimilé rentre dans l'inconscient, du moins quant à ses éléments ; c'est un contingent qui fonctionne en bloc ; nous nous en servons comme d'un outil dont le maniement nous devient si familier,que nous oublions sa structure,simplement reconnu alors d'après son caractère synthétique,et goûté à raison de ce qu'il produit : c'est une qualité.

Le domaine sensible semble correspondre en un sens à la synthèse des infra-dimensions. Il est tel relativement à ce qui est reconnu comme qualité, c'est-à-dire relativement à la perception. Mais la sensation contient encore un élément affectif d'attraction ou de répulsion, contact avec quelque chose d'indéfinissable, qui, loin d'être un acquis, constitue au contraire le domaine encore impénétré.La sensation est un phénomène complexe,

une limite entre la matière inintelligible seulement éprouvée, et la qualité, qui est la reconstitution d'une synthèse marquée de l'empreinte du sujet. Elle jaillit du choc entre le sujet et l'objet, entre l'esprit et la matière ; elle renvoie à l'esprit, en même temps qu'une empreinte étrangère, le reflet de sa propre constitution. Elle répond donc à la fois aux infra et aux supra dimensions : aux infra-dimensions en tant que qualité reconnue, aux supra-dimensions en tant qu'intensité subie.

Or, nous l'avons déjà vu à plusieurs reprises, l'intensité représente la quantité pure ; la Grandeur et le nombre sont deux jalons intermédiaires, la Grandeur représentant la première délimitation de la Matière, sa périphérie ; et le Nombre étant la racine de la Qualité, la charpente ordonnatrice de la Matière. Or les dimensions sont l'adaptation la plus immédiate du nombre à la grandeur, le lien entre la continuité et la discontinuité dans l'étendue, ce qui conduit de la forme sensible au concept. L'état géométrique le plus voisin du nombre consiste dans la considération des points. La géométrie ponctuelle se résout ainsi dans l'algèbre, tandis que la géométrie des formes sensibles s'oriente vers l'esthétique plastique.

L'assimilation par l'esprit des données géométrique tend ainsi, par les deux extrêmes, à transformer la quantité en qualité. *La multiplicité des dimensions, synthétisée par l'esprit, est perçue comme qualité* ; *l'excès des dimensions encore non soumises à l'élaboration analytique est éprouvé comme intensité.*

***

On se trouve ainsi amené à considérer à la fois des infra et des supra dimensions, les premières étant devenues inconscientes comme éléments assimilés constituant la synthèse qualitative ; les secondes, non encore distinctes comme éléments, encore non appréhendées par l'organe d'élaboration intellectuelle. Et la sensation est la combinaison de ces deux extrêmes ; elle représente donc l'enveloppe de l'espace, le point de contact de l'esprit et de la matière. L'espace, au contraire, nous l'avons vu maintes fois, est ce qui sépare l'un et l'autre ; la sensation est donc l'annulation de l'espace, et les dimensions sont les étais empêchant les contacts d'où naît la sensation, et s'évanouissant avec elle.

Par rapport à cet espace intérieur, constitué par la mémoire, le sentiment joue le même rôle que la sensation vis-à-vis de l'espace extérieur. Comme elle, le sentiment se compose d'une émotion qui représente ce qui n'est pas assimilé, et d'une idée qui est la perception subjective. Le sentiment est une sensation ayant son siège dans le centre de l'individualité ; il déplace le sujet en translation ; la sensation est un sentiment ayant son siège dans une partie du sujet et le déplaçant en rotation.

Vis-à-vis de la sensation et du sentiment, le plaisir et la douleur dépendent de la prédominance de l'ordre ou du désordre, du rythme ou du non-rythme qu'ils comprennent. Le nombre reparaît ici comme l'élaboration de la qualité. Puisque les dimensions sont des degrés de transition dans la transformation de la quantité en

qualité, leur superposition ne doit pas se poursuive indéfiniment ; et,puisque l'espace n'est qu'un état intermédiaire entre deux modes d'existence extrêmes (celui de la soumission à la quantité, et celui de l'affirmation de la qualité pure), il doit s'évanouir dès que la transformation des êtres est accomplie. L'existence de l'espace et le nombre de ses dimensions dépendra donc des états extrêmes des êtres qui se transforment et de leur nature même.

Un espace d'un nombre infini de dimensions correspondrait à des êtres dont l'état primitif,purement quantitatif, est infiniment éloigné de l'état qualitatif. Or, par le seul fait que l'on dénombre des dimensions, on introduit dans les conditions de ces êtres la loi du nombre et avec elle la qualité. Il semble donc qu'un espace ne peut avoir un nombre infini de dimensions qu'à la condition d'aboutir à un nombre transcendant. Or un tel nombre est justement la réduction d'une accumulation infinie de quantité à un nombre fini incalculable exactement, mais parfaitement défini par une forme ou une qualité dont il est l'expression rigoureusement exacte. Si donc le nombre des dimensions de l'espace est infini, ces dimensions ne sont pas exprimables par des valeurs égales dans la série dont la totalité définit l'espace ; car, si ces valeurs étaient égales, la série serait divergente. Il faudrait donc que les termes de la série soient affectés de coefficients différents; autrement dit, que les dimensions soient différenciées entre elles autrement que par leurs directions ; or c'est justement là détruire ce qui constitue l'essence même de la dimension, car on retourne ainsi vers la qualité que la dimension a pour caractère de représenter, la qualité extraite des objets

et appliquée au non-moi universel, c'est-à-dire à l'espace; et là, elles deviennent cette chose mixte entre la qualité et la quantité, une grandeur dirigée.

La série des contrastes superposés donnant un total infini avec des termes tous égaux, on ne peut concevoir non plus ces termes comme infiniment petits et infiniment nombreux, sans quoi le contraste qui les distingue s'évanouirait dans la continuité, ou tomberait dans un espace homogène et sans dimensions. Pour la même raison, plus cette série comprendra de termes (autrement dit, plus l'espace contiendra de dimensions), plus s'atténuera le contraste qui distingue les termes (ou dimensions). Par conséquent, l'intensité ou la capacité de perception d'un sujet conscient étant supposée constante, la multiplication du nombre de dimensions perçues ne pourra s'effectuer sans transformer ces contrastes en qualités à mesure que le contraste de situation s'affaiblit. De toute façon, la dimension perçue comme telle s'efface. Donc, pour un sujet intellectuel donné, le nombre de dimensions perceptibles doit être restreint et voisin des nombres 3 et 4, qui déterminent les contrastes maximum successifs et simultanés. Or cette prérogative des nombres paraît absolue et indépendante de toute constitution psychologique spéciale, et on serait tenté de conclure que le nombre des dimensions, subsistant comme tel en fonction d'un être donné (ob jet ou sujet), ne peut être que de 3 ou de 4, l'excédent se résolvant nécessairement en état de qualité (infra-dimensions) ou état d'intensité pure (supra-dimensions).

***

L'espace serait donc aussi bien, par rapport aux modalités universelles du kosmos que par rapport aux modalités particulières d'un sujet, la réserve alimentaire que les individus absorbent en se qualifiant, le vitellus de l'œuf d'or d'où le monde s'est développé, et où il continue à se nourrir encore jusqu'au jour de l'éclosion complète. Toute sensation représente une digestion de cet aliment, toute notion une assimilation, toute différenciation une transformation de la quantité en qualité. Ouvrir le cycle sans limites, c'est supprimer la sensation, et lui substituer un enchaînement analytique et progressif, c'est développer le domaine de la pensée abstraite. Réduire le cycle à une unité globale, c'est tout ramener à l'intensité dynamique et à l'activité. Ainsi, le développement illimité des dimensions correspond aux déductions sans bornes de l'intellect ; son inclusion, à la conclusion par l'acte, à la réalisation. L'acte sort de l'espace, et, partout où s'accomplit un acte, s'opère une réalisation de qualité, une réduction de l'espace. La sensation enveloppe l'espace, mais ne l'enclôt pas absolument, car le rapport entre l'affectivité et la connaissance qui la constitue aboutit à une évolution progressive ou régressive, suivant que la notion se dégage ou que la passion envahit. Les supra et les infra dimensions, autrement dit la quantité pure et la qualité pure, sont telles par rapport à un sujet pris pour base et non objectivement. La sensation ou, plus généralement, le domaine sensible est le lien qui les relie ; c'est un pont jeté sur l'espace entre deux individualités.

La série spatiale est donc constituée par des cycles dont chacun représente une modalité d'existence.

La multiplication indéfinie des dimensions n'est pas impossible pour cela, mais elle doit se ramener à la reproduction périodique d'états analogues sur des plans successifs. C'est toujours l'hélice du Tao. L'existence sensible représente la condensation de plusieurs périodes cycliques s'interpénétrant. Et cela s'effectue par la transformation de la quantité en qualité, transformation manifestée par la complexité des attributs des corps. Nous en saisissons les racines dans la loi de sélection et dans la loi de différenciation des formes.

***

Nous avons vu qu'à mesure que les dimensions se multiplient, il s'opère une restriction dans les possibilités de groupement d'éléments similaires. D'autre part, le développement des dimensions fournit des possibilités plus nombreuses de combinaisons hétérogènes. Il en résulte une substitution croissante de la qualité à la quantité. La dissymétrie d'un être, en différenciant en lui un plus grand nombre de dimensions distinctes, l'affranchit graduellement des relations purement quantitatives. Les dimensions représentent une phase transitoire entre la Quantité et la Qualité, et la géométrie n'est autre chose qu'une conquête sur la Quantité inqualifiée (1).

---

(1) Aussi ne voyons-nous pas sans danger la tendance de la géométrie actuelle à rejeter les figures et à envisager parfois

On passe de la distinction spatiale de situation à la distinction qualitative en englobant dans une seule figure l'individualité considérée avec ses paramètres. C'est donc par une appropriation, par une sorte d'assimilation de ses relations spatiales qu'une individualité sortira de l'espace. Le corps humain nous fournit déjà un exemple de cela : nos sensations et nos actions, bien que se localisant dans nos organes, s'effectuent généralement comme hors d'un lieu, sous forme d'une qualité ou d'un mode.

La Qualité paraît être la porte de sortie par laquelle les êtres s'affranchissent de l'asservissement quantitatif et quittent l'espace. Cet évanouissement des séparations établies par l'espace peut se concevoir comme correspondant à un nombre transcendant de dimensions et à la différenciation absolue.

Les individus tendent ainsi à devenir à eux seuls leur propre espèce à mesure qu'ils se spiritualisent. Quand ils n'ont plus entre eux aucun élément commun quantifié, ils échappent à cette condition spatiale qui exclut d'un même lieu la répétition spécifique qui enrégimente sous un même uniforme tous les individus similaires. Ils tendent vers ce mode d'existence attribué par saint Thomas aux substances incorporelles telles que les anges : chacune d'elles individuellement est son espèce tout entière. On conçoit alors la possibilité pour ces êtres de coïncider localement sans se confondre, ou plutôt,

---

les éléments géométriques comme des formes algébriques, sans trop s'inquiéter de leur trouver une représentation spatiale directe ou projective.

étant affranchis de cet isolement créé par l'espace entre les êtres, ils s'interpénètrent sans perdre leur autonomie. En eux se réalise dans sa plénitude la personnalité, qui n'est autre chose que la synthèse de l'individualité et de l'universalité.

C'est le désir d'atteindre cette personnalité qui est le ferment du rêve des amants d'être deux en un, rêve déçu à cause de notre assujettissement quantitatif, résultat du Nahash avide, rêve pourtant auquel répond une intersection de cet état supérieur par notre espace et qui est la procréation. On comprend ainsi les doctrines qui enseignent la fin de l'union sexuelle et de la procréation, puisque la sexualité réalisant sa fin ne serait autre chose que l'épanouissement complet de la personnalité humaine, qui n'est presque que virtuelle en chacun de nous (1).

Généralisation de la notion de dimension et cycle des dimensions.

Nous avons envisagé jusqu'ici le concept de dimension dans son intégrité, chaque dimension étant un élément distinct, entier, irréductible. Il y aurait maintenant à examiner les altérations et les ébauches de ce concept, et considérer la fonction-puissance qui correspond à la superposition des dimensions dans toute sa généralité. On serait conduit à considérer des dimensions fraction-

---

(1) Je renvoie sur ce sujet le lecteur à l'étude de la doctrine de Wronski ; elle rendra plus claires pour lui ces considérations et lui découvrira des horizons que je ne puis montrer ici.

naires et irrationnelles permettant aux divers ordres spatiaux de se développer continûment. Rien ne s'oppose à cette conception, et nous sommes très portés à croire que les dimensions se développent dans un kosmos continûment, de même que les phases de l'embryon se transforment insensiblement. Le passage de la blastuta à la gastrula paraît être un symbole assez pur de l'accession d'une dimension nouvelle ; il s'opère là un un retournement de surface qui d'extérieure devient en partie intérieure, et crée une double cavité dont la plus interne, reliée d'abord à l'extérieur, s'isole peu à peu à l'intérieur par une soudure de la double enveloppe, tandis qu'une perforation transforme le cul-de-sac de la cavité intermédiaire en une zone annulaire.

L'introduction des quantités imaginaires dans cette fonction de puissance, de quelque manière qu'elle s'opère, donnerait des résultats qui outrepasseraient la notion de dimension. Elles introduiraient des modalités d'existence dont le mode spatial ne serait qu'un cas particulier. Je ne m'étendrai pas davantage sur la discussion des cas spéciaux de cette fonction, et je renvoie pour cela à l'étude générale de la fonction exponentielle, que nous aborderons plus loin.

Si l'on s'en tient à la notion purement linéaire de dimension en faisant abstraction de leurs directions, il est évident que leur fonction-puissance peut croître sans limite et réaliser des ordres spatiaux indéfiniment superposés. En ce cas, les divers degrés de la fonction que l'on pourrait exprimer ainsi, surface = dimension^2 ; volume = dimension^3, etc. Corporification spatiale du n^e ordre = dimension^n, et chacun de ces termes correspondrait à une véritable modalité spatiale. Mais, si l'on

tient compte de l'orientation,et si l'on considère, non plus l'étendue entière engendrée par l'élévation de puissance d'une dimension considérée comme intensité pure, mais la position nécessairement occupée par cette dimension primitive pour développer l'étendue qui correspond à ses diverses puissances, le facteur $\sqrt{-1}$ intervient à chaque degré,et la fonction devient périodique (1). Si donc les divers ordres spatiaux sont envisagés comme de pures capacités prises en bloc sans tenir compte de

---

(1) Cette différence de point de vue devrait être mise en évidence dans les ouvrages de mathématiques. On épargnerait des efforts pénibles inutiles et souvent stériles pour arriver à résoudre les contradictions apparentes de l'interprétation matérielle des formules. Dans la géométrie cartésienne plane,les deux coordonnées x et y sont supposées réelles l'une et l'autre, car le plan tout entier est supposé réel; x et y sont dépouillés de leur différence qualitative et considérés comme deux mesures de nature identique et purement numérique ; on leur conserve bien une orientation pour appliquer ces mesures, mais cette orientation est effacée, une fois le résultat acquis. Ce qu'on veut, c'est déterminer un point dans le plan par rapport à l'origine, et les axes ne sont que deux béquilles rejetées aussitôt que le point est déterminé. Il s'ensuit que les solutions imaginaires se situent hors du plan.

Au contraire, dans la représentation géométrique adoptée des nombres complexes. on place tous les nombres réels sur une même ligne, et les nombres imaginaires simples sur la perpendiculaire. C'est qu'alors on fait de la géométrie à une dimension, et toute solution imaginaire est rejetée dans la deuxième dimension. Ici, les deux axes sont considérés comme persistants et hétérogènes. On ne multiplie pas les coordonnées x et y, on ne leur fait pas engendrer des surfaces, mais des angles, c'est-à-dire de simples virtualités et non des réalisations dans la deuxième dimension. De là le double aspect de la formule trigonométrique (cos a + sin a) et (cos a + sin a [$\sqrt{-1}$]), suivant que l'on prend pour univers réel le plan ou la ligne.

leurs formes, les ordres spatiaux sont susceptibles de croître sans cesse ; mais c'est là bannir la notion même de l'espace, car un espace sans orientation et sans formes n'est qu'une intensité pure, et ne permet plus de distinguer en son sein des situations. Il faut donc, pour que le développement de la fonction-puissance de la dimension réalise des modalités spatiales, que l'orientation ne s'évanouisse pas avec le développement des puissances. Le facteur $\sqrt{-1}$ interviendra donc dans la fonction. La discussion algébrique de la fonction aboutit donc à la même conclusion que l'analyse métaphysique, c'est-à-dire à considérer la superposition des dimensions comme assujétie à un développement cyclique La période de la fonction sera celle des puissances de $\sqrt{-1}$, c'est-à-dire la deuxième dimension sera positive et imaginaire ; la troisième, négative et réelle ; la quatrième, négative et imaginaire la cinquième, positive et réelle, etc. On a donc un cycle quaternaire. Le schéma de la surface considérée par rapport à la ligne serait imaginaire, celui du volume réel, mais négatif, celui de l'hypervolume à quatre dimensions imaginaire et négatif ; enfin la cinquième dimension serait de nouveau une ligne d'un ordre supérieur. Et un nouveau cycle quaternaire commencerait, ayant toujours pour période $2\pi\sqrt{-1}$.

On voit que la ligne et le volume appartiendraient à des réalités de même nature, mais de sens opposés ; la surface et l'hypervolume seraient de nature contrastantes à la fois avec la ligne et le volume en deux sens opposés.

On remarquera que le volume et l'hypervolume paraissent ramener une régression dans l'expansion di-

mensionnelle, comme si le volume résultait de la puissance cubique, dimension négative, car ($D^3, = -D^3$.)

Or $-D^1$, autrement dit la dimension négative, paraît réalisé par attraction vers le point-origine, c'est-à-dire l'attraction vers le principe individualisant et centralisateur. Il semblerait donc que, si l'espace à trois dimensions est infini en étendue, il est attiré vers un centre, et que les volumes tendent à se contracter.

La quatrième dimension serait un acheminement régressif vers la forme linéaire, intensifiée cette fois ; autrement dit, vers l'unité de direction animée d'une force de tension résultant de la condensation des produits des quatre puissances primitives. Elle serait donc assimilable à la densité, et la cinquième, au mouvement de projection vers un but.

La surface est imaginaire et positive par rapport au volume et à la ligne, c'est-à-dire qu'elle annule la tendance à direction unique de la ligne et la tendance à la centralisation du volume ; elle est expansive et distinctive positivement ; elle étale, elle représente le végétal. L'hypervolume serait de la nature de la surface, mais négativement : ce serait un plissement du volume en surface interne, et cela fait penser à l'évolution animale qui se replie pour mieux synthétiserl'action et condenser la force, ou encore à une sorte de pile productrice d'électricité. Cette quatrième dimension peut, il me semble, se concevoir comme la surface intérieure formée par l'intégration de l'infinité des coupes possibles dans un volume. Or, dans cette intégration, on peut supposer des degrés, et ce serait là ce qui déterminerait la densité des corps ou, à un point de vue externe, leur masse, cet agent passif de l'intensité de la force.

***

Ainsi, la progression des dimensions spatiales semble aboutir, au point de vue purement spatial, à un cycle complet en quatre dimensions ; mais, en même temps, la progression indéfinie s'accomplit grâce à la transformation des intensités spatiales en éléments dynamiques.

Il serait donc bien, suivant la conception des anciens, le shamaïm du Bæreshit, la matrice des énergies qui s'organiseraient suivant le quaternaire des éléments, et les quatre éléments répondraient chacun à l'une des dimensions; ils se réaliseraient l'un après l'autre, et se transformeraient suivant une évolution. Nous avons observé, au début de cet ouvrage, que les végétaux, les animaux et les minéraux réalisaient à une puissance supérieure les fonctions des éléments ; les végétaux répondant aux gaz, les minéraux aux solides, les animaux aux liquides. Si on remarque que l'eau est du feu éteint, on voit que les deux éléments eau et feu répondent l'un et l'autre à l'élément neutre du ternaire de toute réalité (suivant le schéma de Wronski), élément qui se trouve être à la fois la racine et le lien résultant. C'est lui enfin dont l'universalisation réalisera la parité coronale du système. Or l'animal semble, d'après la géologie, avoir paru avant le végétal au sein des eaux : sa fonction est de relier les parties éloignées du globe ; mais il a en lui un feu intérieur, qui commence à se dégager des autres éléments, dans les espèces supérieures, par la chaleur animale. Le fluide nerveux, électricité animale, paraît être l'état de transformation du passif en l'actif du principe binaire dont sont constituées les eaux. Enfin le psy-

chisme est ce feu supérieur, différent du feu élémentaire, et réducteur comme lui dans une certaine mesure, mais en vue d'un ordre supérieur d'existence. Et ce psychisme, qui, chez l'animal, est à l'état encore confus se trouve synthétisé dans l'homme par la raison, qui, en le fécondant, créée le quatrième règne humain, celui du feu. Je ne fais qu'évoquer ici le mythe de Prométhée, laissant au lecteur le soin d'en méditer les significations profondes et multiples.

Nous avons donc sous les yeux, on peut le dire, des espaces à n dimensions : les éléments,les règnes nous représentent les deuxième et troisième périodes de la fonction-puissance, dont les dimensions, perçues par nous comme telles, forment les trois premiers degrés de la première période.

L'évolution spatiale

A cette question : l'espace est-il susceptible de n dimensions? Il faut donc, pour répondre, bien préciser l'extension attribuée aux notions d'espace et d'individualité.

La quatrième dimension, ayant pour caractère de réaliser, ou de préparer tout au moins, la synthèse de la triplicité dimensionnelle qui isole les individualités matérielles, détruit ou altère gravement le caractère essentiel par lequel nous définissons l'espace, qui est l'isolement des individualités par la distance. Néanmoins, synthèse n'est pas confusion, et la distinction persiste entre les éléments dans l'unité synthétique ; l'individualité est transformée, mais il subsiste d'elle une cer-

taine distinction qui la caractérise : son principe isolant seul est supprimé, sa matière est réduite.

Donc, ce mode spatial à quatre dimensions appelle un nom distinct, et on l'a justement nommé hyperespace.

Inversement, un espace à deux dimensions ne répond plus à la notion de l'espace proprement dit, car tout élément superficiel n'est réalisable que comme intersection ou limite de volumes. Ces éléments ne constituent donc pas, pour nous du moins, des individualités existant en elles-mêmes. Et alors, l'espace à deux dimensions ne répond plus à la notion de milieu établissant coexistence distincte d'individualités. En effet, nous pouvons les superposer indéfiniment sans être obligés de traverser le champ spatial qu'ils enlèvent au milieu à deux dimensions. Or une telle opération est jugée impossible pour des êtres enfermés dans ce milieu à deux dimensions. Pour eux, les éléments superficiels jouissent bien de l'individualité matérielle ; mais il en résulte l'attribution à ces éléments d'une troisième propriété qui leur manque pour nous, celle de retrancher une portion du milieu spatial, et cela peut correspondre à une troisième dimension. La dualité de dimension correspond à la possibilité d'une continuité reliant les deux termes d'une opposition radicale et à la possibilité pour un organisme de modifier les positions relatives de ses parties (1). Ainsi, la triplicité de dimensions définirait précisément l'essence d'un espace proprement dit, mais cette triplicité serait relative aux êtres qui peuplent un milieu,

(1) Elle ne définirait pas l'essence de l'espace, mais celle du groupe.

ce milieu n'étant un espace pour eux que lorsqu'ils y perçoivent suivant ces trois intensités de grandeur (1).

On comprend alors que plusieurs dimensions se fondent en une seule à mesure que l'on pénètre dans une variété spatiale d'ordre supérieur, et ainsi, un être qui s'élève à travers cette hiérarchie se trouverait toujours au sein d'un espace à trois dimensions, mais les objets auxquels cet espace servirait de milieu seraient des êtres d'un ordre plus elevé. De plus, chaque être, chaque kosmos passerait par les quatre étapes de la période, et retrouverait sur chaque plan quatre modes d'existence répondant aux quatre dimensions, aux quatre éléments, aux quatre règnes. L'état actuel qui caractérise notre modalité humaine se trouverait à chaque dimension de degré ($4n + 3$.).

Cette conception, que nous ne présentons que comme simple présomption, mais à laquelle nous sommes conduits par une déduction rationnelle, rendra it compte de la thèse ésotérique et des visions mystiques parlant de joyaux et de jardins paradisiaques, d'animaux célestes, de divinités anthropomorphiques, etc. L'analogie des phases d'existence sur les divers plans justifie ce langage.

Les périodes supérieures à celles où un être perçoit les dimensions distinctes ne font plus partie de l'espace pour lui, mais des ordres physiques, biologiques, psy-

---

(1) Nous n'aurions là que l'application du principe établi par Wronski, que toute réalité est une triplicité. La notion d'espace correspondrait à l'état mental intérieur, qui permet d'analyser les éléments abstraits dont est composée toute notion de réalité, et de les concevoir simultanément distincts et en relation réciproque.

chiques, spirituels. En ce sens, l'espace ne peut avoir une somme de dimensions supérieure à la troisième, la réalisation de la quatrième aboutissant à résoudre la multiplicité des individualités en unité synthétique et vivante. La cinquième dimension exprimerait l'action, la sixième l'épanouissement de l'action, la septième sa fixation, la huitième l'unification du produit avec le producteur de l'acte. Et de là se formerait une synthèse vitale supérieure dont le binaire pourtant serait le caractère fondamental, mais ici non le binaire additionnel, irréductible et elliptique, mais le binaire par multiplication, répondant à la lemniscate, cette courbe qui, par un symbolisme probablement voulu, est justement le chiffre 8. La neuvième dimension serait un acte nouveau résultant de ce dualisme cubique, tendant vers le carré du nombre racine des cubes. La dixième serait un nouvel épanouissement, la onzième une individualisation nouvelle, la douzième une nouvelle synthèse réunissant la triplicité et le quaternaire, etc. On retrouve ainsi les sephiroths et le Tarot. Je me contente de signaler cette série, sur laquelle nous aurons l'occasion de revenir.

***

Mais, dans cette superposition cyclique, il faudra tenir compte du temps, ainsi que nous le verrons plus loin. Je renvoie aussi en son lieu la question générale de savoir si la progression cyclique doit avoir un terme ou se poursuivre indéfiniment. On peut se demander si les modalités perçues par nous comme dimensions et, par conséquent, renfermées dans la période élémentaire pour nous (celle qui constitue l'espace proprement dit), n'est

pas déjà elle-même placée au-dessus de périodes qui sont ses racines, et qui, pour nous, seraient des sous-dimensions. Ces sous-dimensions seraient les racines de divers ordres des dimensions. Ainsi, si la ligne est D^1, ces sous-dimensions seraient de la forme $D^{\frac{1}{n}}$. Or on sait que toute quantité a n racines d'ordre n. Pour les quantités réelles, une seule de ces racines est réelle; pour les autres, toutes sont imaginaires conjuguées. Or nous avons vu qu'une quantité imaginaire était la manifestation d'une hétérogénéité de qualité impliquant un genre dont les quantités réelles ne sont qu'un cas particulier. Ainsi, nos dimensions réelles seraient les puissances de sous-dimensions réelles suivant le même cycle que nous avons observé. Mais, en outre, toute dimension, de quelque degré qu'elle soit, pourrait être en même temps une résultante d'éléments extra-spatiaux.

Je renvoie en son lieu l'étude de la génération par les racines imaginaires ; je n'en retiens ici qu'un point : c'est que nous entrevoyons l'espace comme susceptible d'avoir pour origine diverses modalités d'existences différentes. Il nous apparaît, non plus comme le milieu indispensable à l'existence, mais comme un cas particulier de modalités d'existence de natures différentes et inconcevables pour nous. L'espace se révèle alors comme une résultante de diverses combinaisons, et, par conséquent, nous entrevoyons la possibilité de sa résolution et de sa formation. Il redevient ainsi une relativité, une limitation entre des choses, et nous sommes conduits à un résultat analogue à celui que donne l'étude de la conception de la matière. Il semble que cela contredise l'affirmation de l'objectivité de l'espace que nous avons soutenue ailleurs. Mais il n'en est rien, car toute

objectivité est relative. L'espace est objectif en ce sens qu'il n'existe pas seulement dans nos concepts, mais qu'il régit les objets indépendamment de notre pensée. Seulement, ce qui est pour nous un objet devient simple concept pour une sphère de mentalité supérieure ayant intégré en elle ces objets. Et l'espace, qui est, pour nous et pour bien d'autres êtres, une condition nécessaire pour l'existence et la perception, peut très bien, pour un orbe d'existence et de pensée plus vaste, n'être qu'une limite d'images, un accident des objets.

***

L'espace que nous jugeons abstrait est celui des ordres inférieurs à celui auquel nous appartenons. De là notre tendance à n'attribuer de réalité qu'à l'ordre d'êtres auquel nous appartenons nous-mêmes, et à considérer comme de simples créations de notre esprit les êtres d'un ordre moins concret, mais réels pourtant et racines de notre ordre. Cette même tendance explique l'idéalisme philosophique : la pensée, s'élevant par son acte au-dessus de la sphère où la synthèse humaine actuelle a son siège, considère le milieu représentatif comme une création de l'esprit dont l'objectivité est illusoire ; cette objectivité est seulement moins concrète et se résout en éléments de cette pensée connus comme rapports (phénomènes, abstractions). Le réalisme philosophique, au contraire, place la réalité dans les limitations de l'acte, dans les éléments mêmes de la synthèse que construit la pensée. L'idéalisme considère l'acte du cycle, le réalisme envisage les projections du cycle sur la base. Pour l'idéalisme, la pensée s'isole dans son plan, et les plans inférieurs lui

apparaissent comme de simples reflets ; pour le réalisme pensée, règnes et éléments sont confondus dans la projection commune de divers tours de spire sur la base.

Ces deux systèmes sont donc deux points de vue abstraits de la même réalité, également vrais si on les combine, également faux s'ils s'excluent.

Enfin, relativement aux modalités inférieures, l'espace est une sorte de paradis, c'est-à-dire l'ensemble des conditions du non-moi nécessaires à la réalisation des aspirations du moi. Il est pour le chaos l'aurore de l'ordre et de l'harmonie. C'est la stase préparatoire à l'éclosion de la synthèse concrète, c'est-à-dire de la Vie. Il établit dans le chaos une première possibilité d'être ordonné. Nous avons établi déjà cette thèse pour d'autres considérations; nous la verrons confirmée par l'étude des fonctions mathématiques, et nous retrouverons dans e et dans π, dont nous avons entrevu l'influence vis-à-vis de l'espace, les facteurs principaux de l'évolution vitale. Mais ceci nous découvre les liens qui existent entre la géométrie et la vie, et nous donne le droit de raisonner sur la métaphysique de la vie en lui appliquant les fonctions mathématiques et les schémas géométriques, qui sont, dans leur forme abstraite, les premiers jalons posés par le Verbe dans l'indétermination chaotique, et les racines qu'y plonge la Vie.

CHAPITRE III

Construction des ordres spaciaux

Développement de l'espace en fonction du point

Calcul de Grassmann

Grassmann a édifié une mensuration analytiqne de l'espace en prenant pour base le point au lieu de la ligne et en lui appliquant la translation. Lignes, surfaces et volumes s'expriment alors par des produits de 2,3 ou 4 points. Mais Grassmann considère comme nul tout produit qui n'élève pas une collection d'éléments à l'ordre spatial supérieur. Ainsi, AB = O représente 2 points coïncidents, ABC = O un triangle réduit à une ligne, ABCD = O un tétraèdre de hauteur nulle. En définitive, est nul tout produit dans lequel on peut substituer un facteur élevé à une puissance à plusieurs facteurs. Tout produit non nul exprime donc,dans cette géométrie,l'ordre spatial maximum que l'on puisse atteindre avec un nombre donné d'éléments. Et par conséquent, les formes exprimées par les produits d'éléments seront celles qui réalisent la figure rectiligne d'étendue minimum.Ce symbolisme traduit admirablement la notion de l'algorithme

puissance appliqué à l'individualité pure représentée par le point. Le développement A^n des puissances du point A reste intensif, et, en fonction de l'espace absorbé, il est égal à zéro. Cela met en évidence cette loi métaphysique que l'espace n'existe qu'en vertu d'un germe de différenciation, et qu'il est incompatible avec l'identité. Cela met en lumière la genèse de la grandeur, qui est de l'intensité différenciée, condition qui lui permet de s'épanouir passivement et de recevoir ensuite du nombre l'empreinte de la qualité.

Dans cette géométrie, deux figures exprimées par une égalité ne sont pas pour cela superposables. L'égalité ABC = DEF représente deux triangles équivalents, non égaux, autrement dit deux intensités égales de l'ordre spatial surface, abstraction faite de la qualité (forme) affectée par ces intensités.

La ligne droite dirigée et limitée apparaît dans cette géométrie sous deux formes.— 1° Comme segment, elle est le produit de deux points différents ; on peut la supposer comme résultant d'une aspiration progressive opérée par un point virtuel sur un autre, qu'il extériorise en différenciant son intensité. A ce point de vue, chaque ligne indéfinie est considérée comme distincte et deux segments d'égale longueur et parallèles seront des multiples l'un de l'autre ; pour être égaux, il faut qu'ils appartiennent à la même droite et soient ainsi dans le prolongement l'un de l'autre — 2° Comme vecteur, la ligne droite est la différence entre deux points ; on la considère alors comme le milieu séparatif entre deux individualités. Elle est alors une sorte d'intensité négative qui s'oppose à une conjonction exprimable par le carré du point et répondant à la synthèse de l'opposition qui

caractèrise la distance. Pour que deux vecteurs soient égaux, il suffit qu'ayant même longueur et même sens, ils soient parallèles, toute l'étendue étant supposée homogène. Et deux vecteurs sont parallèles lorsque l'un est multiple de l'autre J = xI, le coefficient X n'affectant que la longueur. Ceci se traduit encore par la relation IJ = o, ce qui veut dire que le produit de ces deux distances ne crée aucun lien nouveau et ne réalise pas d'angle.

Par convention, le segment est mesuré par le module du vecteur correspondant; c'est dire qu'on oublie alors la différence de nature de ces deux éléments pour ne retenir que leur mesure numérique et leur orientation.

Ces deux manières d'envisager la ligne sont des plus intéressantes. D'après la première, l'espace a une sorte de base,et les lignes occupent, par rapport à elle, des distances différentes ; d'après la deuxième, il n'a qu'une orientation et toutes les lignes également orientées ont même valeur.

A la différence du segment, le vecteur n'est pas un résultat de la différenciation du carré du point, mais, au contraire, l'expression de cette différenciation réalisée, distinguant les deux points au sein de l'espace. Le segment est pour ainsi dire une ligne dynamisée, le vecteur une simple distance.

La somme d'un point et d'un vecteur équivaut au transport du point suivant un vecteur égal au premier : il y a changement de place suivant cette voie idéale, dont le vecteur exprime l'idée, mais il n'y a pas de segment engendré.

Le produit d'un point par un vecteur est un segment et réciproquement. On voit bien ici que le vecteur n'est

que l'indication du coefficient de différenciation qui permet la réalisation du segment.

Les sommes de points, de segments, etc., de formes réalisent des formes de même ordre ; il en est de même des produits de formes par des coefficients numériques.

La somme de deux vecteurs est de même un vecteur qui est leur résultante.

Le produit de deux vecteurs est un bivecteur. Le bivecteur exprime ainsi le tracé du parallélogramme construit sur les deux vecteurs. Le produit d'un point par un bivecteur est un triangle ; mais ici, il s'agit sans doute dela surface du triangle. Un bivecteur est réductible à la somme de 3 segments qui sont les côtés d'un triangle.

Grassmann ramène le bivecteur à une somme de 2 segments parallèles de même module et de sens contraire : pour cela, il considère le bivecteur comme composé d'une somme de deux produits d'un vecteur par un point, qui, nous l'avons vu, sont égaux à des segments.

De même le trivecteur, considéré comme produit de 3 vecteurs, est un parallélépipède dontlestroissommets s'expriment par le quatrième additionné d'un vecteur. Le tetraèdre qui représente le volume réalisé par ce trivecteur s'exprimera par le produit des quatre points. Le volume du parallélépidède correspondant aura donc pour volume 6 fois le tétraèdre. Le trivecteur unité est tel que, quel que soit le point origine M, on prend pour unité 6 fois ce point, 6 M = 1.

Ce sextuple du point exprime l'expansion du volume parallélépipédique du point, autrement dit le développement du point en volume quand on considère l'espace au point de vue des dimensions, c'est-à-dire un espace euclidien réalisant le volume par un parallèlisme à trois degrés.

Si l'angle qui distingue ces trois séries de parallèles est l'angle droit, le volume type devient le cube qui vaut 6 en fonction du point. Or le cube a 6 faces égales. Le volume issu du point par la voie des vecteurs,c'est-à-dire des lignes considérées comme pures distances, s'exprime ainsi par les faces qui le définissent comme le sextuple de l'intensité du point. Il est, à ce point de vue, du 1er de gré par rapport au point. Au contraire, le produit de 4 points OABC exprime un tétraèdre, non plus par ses limites mais par la plénitude d'espace qu'il remplit, et il représente une fonction du 4e degré par rapport au point.

Grassmann démontre que le produit de 4 vecteurs est toujours nul : cela découle de la convention qui limite à trois le nombre des coordonnées, autrement dit du parti pris de ne pas pénétrer dans l'espace à 4 dimensions. Pour la même raison, Grassmann s'interdit tout produit progressif de plus de 4 points. Alors, il considère comme régressives les multiplications qui donnent une forme dépassant le volume. Ces produits régressifs équivalent à des rapports par quotient, et fournissent les éléments projections, tandis que les produits progressifs fournissent les éléments projetants.

Développement de l'espace en fonction de l'angle

Calcul des quaternions

Le caractère de produit régressif se trouve exprimé dès l'ordre des surfaces par les biradiales de Hamilton, qui consistent dans le rapport de deux ligues angulaires.

Le quotient des deux vecteurs est un élément géométrique régressif par rapport à la surface, et, quand les deux vecteurs ont même module et ne diffèrent que par la direction, ce quotient est égal à cos a sin $a \sqrt{-1}$ (a étant l'angle de deux droites). Cette quantité est nommée verseur.

Les biradiales ne sont donc autre chose qu'une généralisation des quantités complexes.

On comprend que le produit des biradiales n'engendre pas des formes de la quatrième dimension comme le ferait un produit de bivecteurs, mais restent des biradiales. La biradiale qui consiste dans le rapport de 2 vecteurs se trouve être, en même temps, le produit de deux vecteurs. Cela provient de l'introduction de la 3e dimension dans le calcul. Par là, la biradiale manifeste encore son caractère régressif ; elle devient résultante en ramenant dans un plan un vecteur qui se trouvait dans la 3e dimension. En fonction des 3 dimensions, la biradiale s'exprime comme une somme de 4 termes : un rapport de longueur ou scalaire + 3 vecteurs perpendiculaires entre eux. De là la dénomination de quaternion. On a donc à la fois :

Biradiale { = Scalaire + Trivecteur perpendiculaire
= Module × (Verseur)

La première formule analyse les directions suivant les 3 dimensions ; la 2e réduit la biradiale à la considération d'un plan unique.

Cette décomposition des biradiales et des quantités complexes en deux grandeurs irréductibles entre elles est la manifestation géométrique de la nature incommensurable des racines. La surface engendrée par l'angle ou par le module linéaire est, en géométrie, ce qu'est en arithmé-

tique un nombre qui n'est pas carré parfait : sa racine est incommensurable. A plus tard, la métaphysique des racines; au point de vue des formes spatiales, cela nous révèle qu'il peut exister certaines formes dans un ordre spatial donné, qui ne trouvent pas dans les ordres inférieurs un générateur unique, mais proviennent de la combinaison de deux éléments géométriques absolument irréductibles entre eux.

De plus, nous voyons ici que la fonction trigonométrique est, en sens inverse de la fonction logarithmique, un algorithme transitif, celle-là ramenant une sommation à un produit, celle-ci transformant une sommation en graduation. Cela est rendu manifeste par l'égalité suivante :

$$Qo + Qi_1 + Qi_2 + Qi_3 = \text{Module} (\cos a + \sin a \sqrt{-1}$$

Ainsi se trouve confirmée ici la classification algorithmique de Wronski que nous étudierons plus loin. La biradiale se présente sous une triple forme, comme une somme ou résultante, comme un produit ou moyenne géométrique, enfin, dans sa forme primitive, comme un quotient. Elle établit ainsi l'équivalence entre la sommation et la graduation, progressives et régressives. A ce titre, elle correspond à la fonction exponentielle ; elle établit le lien entre la translation et la rotation, et elle correspond ainsi aux deux algorithmes transitifs : la fonction logarithmique et la fonction Sinus-Cosinus. Enfin, sa forme quotient la donne comme la fonction tangente qui est, aux fonctions sinus-cosinus, dans un rapport analogue à celui qui rattache la fonction exponentielle à la, fonction logarithmique. La théorie des quaternions donne en effet :

$$\text{Tangente} = \text{Module} \times \frac{\text{Vecteur}}{\text{Scalaire}} = \frac{\text{Sinus}}{\text{Cosinus}} \times \text{Rayon}$$

Elle exprime l'angle que ferait une biradiale équivalente à une biradiale donnée,quand les extrémités de ses vecteurs se projettent l'une sur l'autre,suivant l'angle de projection convenu (généralement l'angle droit).

Géométriquement et faisant abstraction de toute valeur numérique,le quotient de deux lignes doit correspondre à quelque chose qui rétracte l'expansion linéaire par une sorte de contraste interne. Ce qu'il reste dans le rapport des deux lignes,quand on le dépouille de toute valeur numérique, c'est une relation constante, quelles que soient les grandeurs, pourvu que leur rapport demeure le même. C'est donc la propriété de similitude, propriété qui, nous l'avons vu,est liée à la géométrie euclidienne, et dont le principe est justement ce qui définit la ligne droite, le cercle et l'hélice : la courbure constante.

Or, ici, nous remontons par delà la ligne elle-même, jusqu'à cette invariance radicale qui nous est cachée dans le point lorsqu'il développe une de ces trois lignes.C'est ce principe que l'algèbre exprime par la dérivée,rapport entre longueurs infiniment petites, rapport qui est constant pour la ligne droite et qui devient également constant pour le cercle et l'hélice,si on prend soin de l'exprimer alors,non plus en fonction d'une ligne, mais en fonction d'un point ou d'un axe. Le quotient de deux lignes, c'est leur direction; les directions, à ce titre, sont les racines imaginaires de la ligne, et les dérivées variables peuvent être considérées comme des produits de plusieurs de ces racines.

Le calcul des quaternions offre donc la contre-partie du calcul de Grassmann à partir de l'ordre des surfaces ; il développe la régression spatiale indiquée dans les produits régressifs de Grassmann pour ce qui excède la 3e dimen-

sion. Grassmann a développé également un calcul des quantités de rotation ne différant guère de celui de Hamilton que par certaines notations ; celle de Hamilton met plus en évidence la pluralité des dimensions.

Les produits régressifs sont basés sur la notion des éléments projectifs,qui équivalent à synthétiser en une seule toutes les situations attribuées à une même direction. Le produit régressif d'une ligne par un triangle équivaut à la somme des 3 tétraèdres construits au moyen de la ligne de chaque côté du triangle, et multipliés par le sommet restant. Le produit regressif de 2 triangles est égal à la somme des trois tétraèdres formés avec le 1er triangle et chaque sommet du 2e, et multipliés par le côté restant. Ces produits représentent, dans la troisième dimension, la projection de ce que fournirait le produit progressif dans la quatrième,et l'on voit aussitôt se produire une égalité de la même forme que celle introduite par le calcul des quaternions, entre un produit et une somme. Cela semble démontrer que toute rotation correspond à la possibilité de fournir, au moyen de plusieurs projections,la représentation d'un ordre spatial inférieur d'une translation s'opérant dans un ordre supérieur. L'équivalence d'une somme à un produit,qui est l'essence même du logarithme, correspond ainsi à une réduction dans la hiérarchie des formes, par l'analyse des éléments constitutifs d'une synthèse supérieure.C'est une véritable dissection.

Dans les produits régressifs de Grassmann, on admet la possibilité de multiplier une forme par les éléments dissociés de l'autre,et l'on rabat les résultats dans la 3e dimension,ce qui suppose la possibilité de la rotation. Dans le calcul des quaternions,trois unités rotatives

accompagnent les vecteurs et empêchent ainsi les produits de sortir jamais de l'espace à 3 dimensions : le processus régressif y est ainsi rendu plus explicite.

Mais il faut observer que les produits régressifs masquent une contraction spatiale, car les tétraèdres partiels qui les composent se pénètrent en partie. Il y a donc, dans la figure totale, une zone de plus grande densité. Cela nous montre que la densité peut être considérée comme la pression sur l'espace à trois dimensions de grandeurs développées dans des dimensions supérieures. La chimie s'éclairerait peut-être d'un nouveau jour, si on parvenait à exprimer en produits régressifs de Grassmann la structure des atomes.

La forme quotient que présentent les biradiales est un reflet pour ainsi dire schématique de l'enveloppe qui délimiterait la forme réalisée par un produit progressif emplissent un espace. Le quotient, au contraire, montre le réseau directeur de cet emplissement et permet d'évaluer sa valeur.

La forme de moyenne géométrique est un autre schéma de ces produits progressifs, schéma axial celui-là, procédant, non plus comme le quotient par une sorte de reflet, mais exprimant la première tendance synthétique résultant de la différence d'orientation des éléments, synthèse dont la possibilité est révélée par la rotation. L'unité rotative $\sqrt{-1}$ se présente donc comme le ferment synthétique de l'espace, comme le germe radical de la pluralité possible des dimensions.

Comparaison entre le calcul de Grassmann et celui de Hamilton

Le calcul de Grassmann exprime ainsi le développement de l'espace comme émanant du point par les formes; il limite ce développement en introduisant l'unité rotative. D'autre part, la notion de vecteur établit concurremment le développement de l'espace par la ligne, mais ces lignes sont toujours rapportées au point comme origine : elle se développent en rayonnant. Ce point de vue est donc assez différent de celui de la géométrie courante, fondée sur les dimensions e opérant sur un espace à réseau parallélépipédique.

Les quaternions manifestent également le développement de l'espace en fonction de la ligne; mais en synthétisant constamment le contraste des dimensions, ils semblent faire procéder l'espace du développement de l'angle plan.

Ces spéculations sont fort intéressantes, parce qu'elles expriment des possibilités objectives,et doivent nous faire pressentir que les diverses formes réalisées dans l'espace peuvent avoir des fondements métaphysiques différents.

Le développement des dimensions se conçoit comme engendré par la transformation de chaque élément infinitésimal d'une forme en une forme de même espèce que la primitive.Ainsi, la ligne se ramène ainsi à une infinité de points issus d'un point, la surface à une ligne dont chaque point est devenu une ligne. etc. Ceci est bien l'expression métaphysique de l'algorithme puissance.Chaque puissance d'une réalité correspond à l'être de cette réalité

attribué à l'infinité des éléments qui la constituent ; elle représente la synthèse obtenue par la répétition de la réalité primitive attribuée à chacun des éléments. Pour une quantité discontinue, la chose est évidente. Dans $4^2 = 16$, chaque unité de 4 est devenu un 4 à elle seule. Pour une quantité continue, c'est-à-dire composée d'une infinité d'éléments infiniment petits, chaque élément est devenu égal à la quantité primitive.

Ceci montre clairement que ce n'est pas en vertu d'une convention arbitraire que le carré et le cube du nombre qui mesure une ligne expriment la mesure de la surface e du volume obtenus par la construction de ces figures. Ce qui serait conventionnel et illogique serait d'exprimer les surfaces des carrés et des cubes par une autre unité que les puissances de la ligne. La convention arbitraire ne commence que lorsqu'on applique ces unités de mesure des figures ayant d'autres formes : triangles, tétraèdres, cercles, sphère, etc.; alors, une telle mesure ne traduit, en effet, que l'équivalence de ces surfaces et de ces volumes à celles d'un carré ou d'un cube, et n'exprime plus la genèse véritable des formes.

On remarquera que la perpendicularité est l'expression géométrique correspondant à l'algorithme puissance. Le développement d'une puissance, d'une réalité se produit donc par la synthèse opérée suivant le contraste maximum simultané. L'espace dimensionnel est celui qui correspond à cet algorithme. Son type est l'hexaèdre.

L'espace qui développerait le calcul de Grassmann serait un espace convergent, tétraédrique, dont le type pur est le triangle équilatéral, et qui correspond au contraste successif. L'espace que développeraient les quaternions paraît convergent aussi et de type octaédrique.

L'algorithme correspondant à l'espace de Grassmann serait $R^n \sqrt{3}$; celui correspondant à l'espace de Hamilton (ou des quaternions) $R \sqrt{2}$ tandis que l'espace dimensionnel est R^n.

On voit que ces trois espaces peuvent être considérés comme des variétés de l'espace euclidien. S'il est possible d'exprimer l'espace dimensionnel avec les calculs de Grassmann et de Hamilton et de se servir avec ces calculs des coordonnées cartésiennes, c'est grâce à l'unité rotative choisie, qui, dans ces deux systèmes, est justement l'angle droit, c'est-à-dire le schéma de développement des dimensions.

SECTION III

LES FORMES RÉGULIÈRES DANS LES *N* DIMENSIONS

CHAPITRE I

Les Séries de formes régulières

L'étude précédente montre que les hypergéométries construites d'après la considération seule des dimensions sont loin de représenter toutes les possibilités réalisables dans les espaces d'ordre supérieur. Il faudrait étudier parallèlement d'abord toutes les formes comme susceptibles de provenir des puissances du point, en un mot poursuivre le calcul de Grassmann au delà du 4e ordre et supprimer la restriction qu'il a opposée aux produits progressifs. Il y aurait aussi à généraliser encore la théorie des quaternions pour étudier le développement des formes en fonction des puissances de la surface. Il y aurait encore à découvrir un calcul basé sur les puissances du volume et à le développer.

Il faut donc bien observer que la condition de formes régulières ne représente que le cas particulier de l'ex-

pansion linéaire subordonnée à la centralisation ponctuelle.

Nous laissons également de côté les figures à symétrie réduite, telles que le triangle isocèle, le rectangle, etc., que l'on peut considérer comme des figures régulières altérées par des coefficients appliqués à leurs diverses puissances, ou par des exposants fractionnaires

Nous omettons encore tous les modes de génération par mouvement continu d'un élément, modes qui s'éloignent de la conception dimensionnelle et de l'élément contraste dont l'espace tire sa permanence, modes qui se rattachent au contraire à l'élément rythme, qui synthétise les distances au moyen du temps.

Il faut encore remarquer que le développement de chacune des formes régulières ne représente pas la même fonction vis-à-vis de l'élément spatial qui lui sert de base. Au point de vue dimensionnel ou hexaédrique, chaque dimension correspond à une puissance de la ligne pure et simple.

Mais une même figure peut être considérée comme une fonction complexe (une résultante) ou comme une fonction simple d'autre origine. Tel le carré, qui, dans la série hexaédrique, représente la 2e puissance de la ligne, tandis que, dans la série octaédrique, il joue un rôle tout différent.

La seule multiplicité des racines de même ordre dès qu'on introduit dans les fonctions les quantités dites imaginaires, c'est-à-dire la considération de qualité (et c'est ici le seul élément qui soit en jeu, puisque, dans les formes régulières, tous les éléments de même ordre sont égaux) suffit, pour montrer la pluralité de relations qui peut unir entre eux deux éléments. Un

point peut être la racine bicarrée de la surface engendrée par l'intermédiaire d'une ligne obtenue d'après la série hexaédrique ; d'autre part, un point peut être la racine cubique de la surface, d'après la série tétraédrique. Ces deux points diffèrent quant à leur source et quant au potentiel de leur développement, mais rien ne les distingue en eux-mêmes.

Nous rencontrons ici une application de ce principe métaphysique qu'un même effet peut provenir de diverses causes; mais cette identité n'est qu'apparente et relative à un point de vue abstrait, à une zone restreinte de perception : elle s'évanouit dès qu'on peut saisir les relations antécédentes et conséquentes, ou qu'on pénètre la matière de l'objet et qu'on découvre sa substance.

L'évolution du point à travers les formes régulières ne nous donne que les lois de l'alliance entre l'influence centralisatrice du point et l'influence translative de la ligne. La géométrie sphérique donnerait les lois de la puissance centralisatrice pure. Il est à croire que l'essence de la surface, celle du volume, etc., considérées dans toute leur pureté, donnent aussi des développements de formes dont les lois nous échappent.

La construction dimensionnelle ou hexaédrique indéfinie correspond aux puissances de la ligne, c'est-à-dire à la translation combinée cependant au principe de la rotation. Elle représente une sorte de modalité euclidienne au 2e degré, c'est-à-dire : au sein de l'espace euclidien, elle correspond à l'état de neutralité que cet espace tout entier exprime par rapport aux deux autres Les formes régulières en fonction du point représentent dans l'espace euclidien, l'influence convergente ; il y

aurait à étudier les formes régulières en fonction de la surface, qui se rattachent probablement à l'influence divergente.

On peut ainsi considérer l'espace comme engendré soit par les puissances du point indifférencié (espace sphérique), soit par les puissances du point affectée du coefficient $\sqrt{3}$ (espace tétraédrique), soit par les puissances de la ligne affectées du coefficient $\sqrt{-1}$ (espace dimensionnel ou cartésien), soit par les puissances de la surface du volume, ou d'une forme à n dimensions.

Les quaternions se rattachent à la trigonométrie et au principe des lignes complexes synthétisées dans le carré de l'hypoténuse. On pourrait remonter de là à l'angle droit, et considérer le développement de l'espace sous forme d'angle droit affecté du coefficient $\sqrt{2}$

C'est à ces trois processus que paraissent se rattacher le développement des trois séries de formes régulières qui se poursuivent à travers les n dimensions, c'est-à-dire à la conservation du principe centralisateur se combinant aux influences de la ligne, de la surface, du volume, etc.

Lois de Génération

La série tétraédrique correspond au binôme $(1-1)^n \begin{smallmatrix}+1 \\ =0\end{smallmatrix}$ qui, par les divers termes de son développement, exprime le nombre de chacun des éléments constitu-

tifs de la forme engendrée (1). Elle réalise le minimum d'éléments et d'étendue exigé pour centrer une figure plane. Le point semble sortir de lui-même par contrainte et chercher la moindre expansion nécessaire. Cela correspond au contraste maximum successif entre deux directions, contraste qui évoque le temps et n'implique l'espace que par le souvenir dans cet espace interne de la mémoire où la coexistence idéale est donnée aux choses, coexistence que leur refuse l'espace matériel Le point apparaît ici comme le contact entre l'espace. interne ou mémoire et le milieu extérieur, la pupille par où passent tous les rayons, le foyer où doivent converger les irradiations de l'idée pour que l'acte réalise au dehors l'image conçue grâce au temps.

Dans cette série, les points qui se groupent autour du centre virtuel de la figure (centre qui est comme

---

(1) Les formules ci-après relatives aux 3 séries du tétraèdre, de l'hexaèdre et de l'octaèdre sont tirées de l'ouvrage de M. Boucher : *Essai sur l'hyper-espace* et établies par M. Stringham.

SÉRIE TÉTRAÉDRIQUE $(1-1)^{n+1} = 0$	SÉRIE HEXAÉDRIQUE $[1]-(2-1)^{n} = 0$	SÉRIE OCTAÉDRIQUE $(1-2)^{n} \pm [1] = 0$
On a pour n dimensions		
Sommets $n+1$	$2n$	$2n$
Arêtes $\frac{(n+1)n}{n\ 2}$	$2^{n-1} \times n$	$2^{2}\ \frac{n(n-1)}{1.\ 2.}$
Faces $\frac{(n+1)\ n\ (n-1)}{1.\ 2.\ 3.}$	$2^{n-2}\ \frac{n(n-1)}{1\ 2.}$	$2^{3}\ \frac{n(n-1)(n-2)}{1.\ 3\ 3.}$
Solides à 3 dimensions $\frac{(n+1)\ n(n-1)(n-2}{1.\ 2.\ 3.\ 4.}$	$2^{n-3}\ \frac{n(--n1)\ (n-2)}{1.\ 2.\ 3.}$	$2^{4}\ \frac{n(n-1)\ (n-2)\ (n-3}{1.\ 2.\ 3.\ 4.}$
Formes à dimensions $\frac{(n+1)n(n-1)(n-k+1)}{1,\ 2,\ 3 \dots k}$	$2^{n-k}\ \frac{n\ (n-1) \dots (n-k+1)}{1.\ 2.\ 3 \dots k}$	$2k + \frac{n-(n1)\ (n-2) \dots (n-k)}{1 \quad 3 \dots (k+1)}$

l'idéal désiré par le principe centralisateur du point contraint à se disperser), autrement dit, les sommets sont en nombre minimum. Ils se multiplient avec les dimensions suivant la formule $n+1$, c'est-à-dire qu'il représente exactement le degré de puissance du point. La ligne sera bien dans cette série le carré du point, mais ce sera la ligne ayant une origine et une terminaison, une ligne asymétrique, ayant un sens.

L'expression (1 — 1) indique une libration pendulaire qui revient au zéro. Ceci révèle l'oscillation revenant toujours vers le point : rien ne décèle mieux cette tendance centralisatrice et d'expansion minimum. Chaque dimension répète une fois cet aller et ce retour vers le point origine, et le caractère unilatéral spécial à cette série est rendu manifeste. Dans la 1re dimension, on a une ligne ayant un sens, avec une origine et une terminaison. Dans la 2e dimension, 3 librations revenant sur le centre, et la ligne unissant les extrémités aura pour expression $\sqrt{3}$ en fonction du principe centralisateur qui régit le sens de ces librations. La croissance de l'étendue réalisée sera d'expansion minimum, par conséquent la série des nombres entiers répondant au degré de l'ordre ponctuel qui excède toujours de 1 celui des dimensions.

***

La ligne, considérée en elle-même comme première puissance d'un élément autonome se développera suivant les dimensions, et l'influence centralisatrice agissant sur ce développement, limitera l'expansion et produira le carré, le cube et toute la série hexaédrique. La formule de cette série est $1 - (2 - 1)^n = 0$.

A quatre dimensions, on aurait une forme ayant 8 héxaèdres (d'où sonn om octaédroïde), 32 arêtes, 24 carrés et 16 sommets. Les sommets croissent dans cette série suivant la formule 2^n. Cela f ait ressortir le caractère nettement binaire et équilibré de la ligne, qui ici apparaît comme le type de la distance indifférente, de l'étendue linéaire immédiatement réalisée par expansion binaire et symétrique. L'influence centrée du point s'y est élevée à la deuxième puissance d'une manière absolue ; le principe centralisateur se multiplie en tous les points de la ligne, qui devient un axe. De là toute une série de formes symétriques par rapport à un axe, formes dont le type est le rectangle, et qui ne sont plus fonctions, comme la série hexaédrique régulière, du point à la première puissance, mais seulement du carré du point.

La série de l'hexaèdre est la véritable émanation de la ligne, car chaque fois elle projette une ligne à une distance égale à elle-même. Son binôme $1 - (2 - 1)^n = 0$, autrement dit $1 = (2 - 1)^n$ exprime encore sa nature. Dans son premier degré, dimension linéaire, l'expression $(2 - 1)$ montre une libration allant à 2 puis revenant sur 1 : ses puissances seront donc les puissances de +,1, réalisées par des oscillations toujours positives, retournant à l'unité après une expansion vers 2 : cela exprime bien le dédoublement de chaque sommet. Pour la dimension 0, cette série s'exprimerait encore par 1^0, exprimant le point contenant la source de toutes les lignes.

Cette série, basée immédiatement sur la ligne, dont chaque point est la source d'une nouvelle ligne, exprime naturellement l'espace comme permanent, comme déve-

loppé primitivement et non comme projeté d'une source inétendue. Elle traduit, par la perpendicularité qui est son essence, le contraste simultané, le quaternaire cosmique. Cette série se développe sans réaliser de convergence ni de divergence ; elle exprime la neutralité absolue de l'espace euclidien, et il est à remarquer que cette neutralité est obtenue en soumettant le principe centralisateur à se diviser suivant les puissances de 2. La ligne type est celle-ci. C'est la distance, c'est ce qui établit la réciprocité entre le sujet et l'objet et les relie tout en les isolant.

***

La série de l'octaèdre, qui coïncide avec celle de l'hexaèdre dans la 2e dimension paraît issue de la ligne complexe $x + y\sqrt{-1}$, formée par un angle droit. Son binôme $(1 - 2)^n \pm 1 = o$ exprime encore sa nature. Pour la première dimension, l'expression $(1 - 2)$ indique une libration allant vers l'unité positive, puis rétrogradant du double, donc aboutissant à l'unité négative. Les puissances seront celles de -1, c'est-à-dire alternativement positives et négatives, donc une série d'expansion dans chaque dimension changeant de sens chaque fois, et par conséquent revenant toujours vers les axes. Cette série ayant pour base l'unité négative a pour souche $\sqrt{-1}$, qui est le principe des quantités complexes. La ligne unissant les extrémités implique deux lignes angulaires et aura pour expression $\sqrt{2}$ qui est la mesure de l'hypoténuse du triangle rectangle isocèle. Cette série a donc pour essence la polarisation binaire de la ligne et se développe sur des axes cruciaux.

L'angle droit pris en lui-même comme base paraît être le principe de la série octaédrique. L'angle est l'élément intermédiaire entre la centralisation et l'expansion, entre la direction et la longueur. Il synthétise un élément être et un élément-savoir : une étendue orientée.

La série octaédrique paraît avoir pour fondement le point complexe, dont la première puissance se traduit par cette formule :

La somme du sinus et du cosinus = la racine carrée du module.

Quand on fait abstraction des différences d'intensité des divers éléments, le sinus et le cosinus étant égaux, on obtient l'angle de 45°, dichotomie de la perpendicularité, et le module devient $\sqrt{2}$. C'est ce nombre, nous manifestant le principe binaire radical, qui paraît être le ferment de la série octaédrique. Cette série répond au binôme $(1-2)^n + 1 = 0$. Les sommets s'y développent suivant la formule $2n$.

Au point de vue de cette série, la ligne droite (ou le module) est comme la résultante de deux lignes formant un angle droit situées dans une infra-dimension. Dans l'ordre surface, cette série donne le carré construit, non plus sur le côté, mais sur les diagonales. Dans l'ordre volume elle réalise l'octaèdre. Cette série répond ainsi à une sorte d'expansion rayonnante du point, expansion qui se limite par la plus courte voie.

La série octaédrique donne, pour l'espace à quatre dimensions, une forme appelée hexadécaédroïde, constituée par 16 tétraèdres, 32 faces, 24 arêtes et 8 sommets. Les sommets se développent suivant la formule $2n$.

On voit aisément la situation intermédiaire de la série octaédrique par rapport aux deux autres. Par rapport aux sommets la formule tétraédrique ($n + 1$ répond à l'algorithme sommation (E E) ; la formule hexaédrique $2n$ répond à l'algorithme graduation (E S) ; la formule octaédrique $2 n$ répond à l'algorithme reproduction (E N), qui est en même temps la neutralisation et la racine des deux autres. Et nous trouvons ici une vérification des principes de Wronski.

Cette situation de la série octaédrique exprimée par le mode de développement des sommets, c'est-à-dire par l'évolution du principe centralisateur à travers les ordres spatiaux,se révèle également par la structure de l'octaèdre. Il a pour plans diagonaux 3 carrés et pour faces 8 triangles équilatéraux. Son arête $= \sqrt{2}$. Il révèle ainsi la combinaison du carré et du triangle, le carré jouant le rôle d'axe, de multiplicateur, représentant le principe mâle, le triangle jouant le rôle d'enveloppe, de multiplicande. représentant le principe femelle. Les carrés qui forment les plans de symétrie de l'octaèdre doivent être plutôt considérés comme émanant du principe circonscriptif du point qui tend à limiter par le périmètre minimum l'expansion du quaternaire axial ; et celui-ci apparaît comme étant le carré de l'expansion du point dans le sens superficiel. C'est ainsi la combinaison de l'expansion linéaire et de la centralisation ponctuelle. C'est la seule figure qui puisse convertir ses pôles en équateur, et vice versa. Cette liaison de la translation et de la rotation s'accomplit ainsi dans la ligne complexe de la forme $x + y\sqrt{-1}$. Et nous entrevoyons ici la possibilité d'un nouveau type de formes ayant pour fondement,

non plus la concentration ponctuelle, non plus la translation linéaire, mais l'étalement superficiel, dont l'angle ne nous donne qu'une idée incomplète.

***

Ces trois séries se construisent par une élévation de puissance. La série du tétraèdre exprime les puissances de la dimension zéro; les séries conjugueés de l'hexaèdre et de l'octaèdre, les puissances de la première dimension. Or celles-ci correspondent, au point de vue de l'expansion des formes, à l'équilibre entre la convergence et la divergence dans le développement des formes à travers les ordres spatiaux. Et ceci aide encore à préciser la notion de dimension. La dimension est en quelque sorte la dérivée constante d'une certaine fonction.—La division d'une grandeur de translation en parties égales correspond à une sommation d'éléments égaux. C'est là ce qui exprime l'équilibre en fonction de la translation pure.—La constance d'une direction correspond à la multiplication d'éléments quelconques par un facteur constant. C'est là ce qui exprime l'équilibre dans le développement de l'expansion pure. — La constance d'une base élevée à des puissances quelconques est ce qui exprime l'équilibre en fonction de l'emplissement. Par conséquent, au delà de cette fonction-puissance, le développement spatial,s'accomplissant avec accélération par rapport aux dimensions, devient envahissant à mesure que croît le nombre de dimension,et doit aboutir rapidement à un cycle.— Pour que des suites de ce genre réalisent,dans certains ordres spatiaux, des figures contenues dans le schéma dimensionnel et centralisateur

(le dernier cas est celui des polyèdres réguliers et des formes centrées), il faut que la fonction, bien que croissant d'abord plus rapidement que la fonction-puissance de la ligne (autrement dit, suivant des angles obtus), contienne un certain élément obéissant à la convergence. C'est ce que révèlent les polygones gauches sur lesquels se fondent le dodécaèdre et l'icosaèdre.

Analyses des formules des trois séries

La formule de la série tétraédrique se compose du binôme $(1-1)^{n+1} = 0$. Le développement relatif à la dimension n sera du degré $(n+1)$. Au contraire, dans la formule des séries conjuguées de l'hexaèdre et de l'octaèdre, on ne prend que la puissance n. Le développement aura donc, pour une même dimension, un terme de moins que dans la série du tétraèdre. Par contre, on a toujours une unité complémentaire qui ajoute un terme à ceux que fournit le développement du binôme.

Si l'on rapproche les développements relatifs à la 3e dimension de la formule d'Euler, qui est :

$$\text{Sommets} + \text{Arêtes} + \text{Faces} - 2 = 0,$$

on verra que la constante 2 y est remplacée par deux unités distinctes : l'une correspond au polyèdre réalisé, l'autre se trouve placée dans la formule du tétraèdre avant le terme relatif aux sommets. Dans la série de l'hexaèdre, l'unité complémentaire est négative par rapport au premier terme, qui exprime les sommets ; il faut, si l'on veut observer la loi d'alternance des

signes entre les termes, placer cette unité avant le terme des sommets et non après celui du polyèdre. Dans la série de l'octaèdre, c'est le 2e terme du développement du binôme qui exprime les sommets, l'unité complémentaire change de signe avec chaque dimension ; elle est de signe contraire au 1er terme pour les dimensions paires, de même signe pour les dimensions impaires. Cette alternance du signe affecté à une unité qui ne dépend pas du binôme développé, permet de la considérer comme exprimant $(-1)^{n \pm 1}$. Et par analogie dans la formule de l'hexaèdre qui est conjuguée à la précédente, l'unité complémentaire exprimera $(-1)^{n \pm 1}$. — Dans la série de l'octaèdre, cette unité complémentaire ne peut exprimer que la forme supérieure, en vertu de a loi d'alternance des signes. Le 1er terme du développement du binôme désigne, dans cette série, un élément placé en deçà des sommets. Dans la série de l'hexaèdre, l'unité complémentaire, étant toujours positive, est forcément placée, nous l'avons vu, avant les sommets ; c'est elle qui est relative à cet élément en deçà du point.

La formule du tétraèdre renferme également un terme relatif à cet élément : il est comme, pour l'octaèdre, le 1er terme du binôme développé ; mais le dernier terme exprimant la forme réalisée est fourni dans cette série. comme dans celle de l'hexaèdre, par le binôme développé. Cet élément en deçà du point apparaît donc dans les 3 séries, mais avec une origine différente. Dans la série hexaédrique, il paraît isolé du développement genétique de la forme. Dans la série octaédrique, c'est la forme supérieure qui semble se superposer aux éléments des dimensions inférieures sans en provenir. Seule la série tétraédrique semble également liée à la forme réalisée

Tableau du développement explicite des binômes des 3 séries fondamentales [1]

(S = sommet ; A = arêtes ; F = face ; V = volume ; K = forme à 4 dimensions ; n = ordre dimensionnel)

Série Tétraédrique $(1-1)^{n\times 1} = 0$

$n = 0$	$(1-1)^1 = 1 - 1.\,S \qquad = 0$
$n = 1$	$(1-1)^2 = 1^2 - (2\times 1\times 1 = 2)\,S + 1^2\,A \qquad = 0$
$n = 2$	$(1-1)^3 = 1^3 - (3.\,1^2.\,1 = 3)\,S + (3.1.1_2 = 3)\,A - 1^3\,F \qquad = 0$
$n = 3$	$(1-1)^4 = 1^4 - (4.\,1^3.\,1 = 4)\,S + (6.1_2.1^2 = 6)\,A - (4.\,1.\,1^3 = 4)\,F + 1.\,V \qquad = 0$
$n = 4$	$(1-1)^5 = 1^5 - (5.\,1^4.\,1 = 5)\,S + (10.1^3.1_2 = 10)\,A - (10.1.^2 1^3 = 10)\,F + (5.1.1^4 = 5)\,V - 1K = 0$

Série hexaédrique $1-(2-1)^n = 0 \qquad = 1^{n+1} - (2-1)_n = 0$

$n = 0$	$[1] - (2\text{-}1)^0 = [1] - (2 - 1 = 1) - \qquad = 0$
$n = 1$	$[1] - (2\text{-}1)^1 = [1] - (2)\,S \quad - 1\,A \qquad = 0$
$n = 2$	$[1] - (2\text{-}1)^1 = [1] - (2^2 = 4)\,S \quad - (2.\,2.\,1 = 4)\,A + 1^2\,F \quad 1; \qquad = 0$
$n = 3$	$[1] - (2\text{-}1)^3 = [1] - (2^3 = 8)\,S \quad - (3.\,2^2\,1 = 12)\,A + (3.\,2.\,1^2 = 6)\,F - 1^3\,V \qquad = 0$
$n = 4$	$[1] - (2\text{-}1)^4 = [1] - (2^4 = 16)\,S - (4.\,2^3 1 = 32)\,A + (6.2^2.1^2.1 = 24)\,F - (4.2.1^3 = 8)\,V + 1^5\,K = 0$

Série octaédrique $\pm 1 - (1\text{-}2)^n = 0 \quad = (-1)^{n+1} - (1-2)^n = 0$

$n = 0$	$(1-2)^0 \pm [1] = 1^0 - \qquad -[1]\,S = 0$
$n = 1$	$(1-2)^1 \pm [1] = 1^1 - 2\,S \qquad +[1]\,A = 0$
$n = 2$	$(1-2)^2 \pm [1] = 1^2 - (2.\,1.\,2 = 4)\,S + (2^2 = 4)\,A \qquad -[1]\,F = 0$
$n = 3$	$(1-2)^3 \pm [1] = 1^3 - (3.\,1^2\,2 = 6)\,S + (3.\,1,2^2 = 12)\,A. - (2^3 = 8)\,F \qquad +[1]\,V = 0$
$n = 4$	$(1-2)^4 \pm [1] = 1^4 - (4.\,1^3.\,2 = 8)\,S + (6.1^2.2^3 = 24)\,A - (4\,1.2^3 = 32)\,F + (2^4 = 16)\,V - [1]\,K = 0$

1) Ces séries étant illimitées, on pourrait poursuivre indéfiniment leur développement.

et à l'élément qui est en deçà des sommets. Cet élément en deçà du point qu'on peut considérer comme le centre autour duquel rayonnent les sommets apparaît donc comme un soubassement sans lien genétique par rapport à la série hexaédrique. Au contraire, il se révèle comme la racine des deux autres. D'autre part, la série octaédrique semble incapable d'individualiser ses productions ; la forme réalisée n'y apparaît que comme le schéma résultant de la disposition des éléments inférieurs. Cette série semble exprimer des formes vides, virtuelles, et cela confirme nos déductions précédentes, qui ont fait dériver l'octaèdre, non du carré, mais de la croix perpendiculaire.

***

La constante 2, caractéristique de la 3e dimension, et se dédoublant comme nous l'avons vu, n'existe pas dans la 2e dimension et disparaît dans la 4e dimension. Cela s'explique : les formules ont un terme de plus, et, comme le signe change chaque fois, l'unité initiale est de signe opposé à l'unité qui exprime le polyèdre, d'où annulation réciproque ; la formule générale de toutes les formes régulières de la 4e dimension est donc :

Sommets — Arêtes + Faces — Polyèdres = 0.

Les deux moitiés de formules sont égales ; on a toujours Sommets — Arêtes = Faces — Polyèdres.

L'alternance de signe correspondant à une propriété géométrique montre que la génération des dimensions résulte d'un principe d'oscillation, ou plus généralement d'opposition. C'est cette opposition qui, considérée au point de vue des relations spatiales entre des individus, se nomme distance. Ceci montre que tout es-

pace ayant un nombre pair de dimensions doit avoir un certain caractère de neutralité, tel, que ses formes constituent des systèmes, pour ainsi dire saturés ; tandis que les formes à dimensions impaires paraissent être des sortes de radicaux, leur équilibre ne se réalisant qu'en vertu d'un élément situé en deçà des sommets.

Nous retrouvons là, pour la 3e dimension le caractère condensateur déjà remarqué précédemment.

De plus, dans chaque série, pour la 4e dimension, les nombres des divers éléments sont multiples de ceux des sommets. Cela semble indiquer une éclosion particulière qui donnerait la 4e dimension comme un degré d'équilibre et de saturation particulier dans le développement des formes.

Ces propriétés distinctives de la 3e et de la 4e dimension s'appliquent également aux suites de l'icosaèdre et du dodécaèdre que nous n'avons pas encore étudiées.

***

Soit N , la suite naturelle des nombres entiers 1, 2, 3, 4, etc.

S, la suite des sommes de ces nombres, $1+2] + 3] + 4]$, etc.

T, la suite des sommes de ces sommes (nombres triangulaires), tels que $1 + (1 + 2)] + (1 + 2 + 3)] + (1 + 2 + 3 + 4)]$.

Q, la suite des sommes des nombres triangulaires.

U, W, etc., les suites successives formées en poursuivant ce processus.

En disposant ces séries suivant le tableau ci-dessous,

chaque rangée horizontale donnera dans leur ordre les coefficients d'une puissance du binôme (1—1), relatifs à la série tétraédrique. Ces mêmes coefficients nous serviront à établir les termes des séries hexaédriques et octaédrique.

Tableau des séries de nombres constituant les coefficients du développement des puissances du binôme (1—1).

1 — 1
1 — N + 1
1 — N + S — 1
1 — N + S — T + 1
1 — N + S — T + Q — 1
1 — N + S — T + Q — U + 1

Dans chacune des trois séries fondamentales de formes régulières, une forme a *n* dimensions prend tous ses coefficients dans la même rangée. Faisons abstraction des coefficients extrêmes, qui sont égaux à l'unité, et qui s'appliquent aux termes ne contenant que l'une des deux unités fondamentales du binôme radical, élevé à une certaine puissance. Le premier coefficient sera alors tiré de la série N, le deuxième de la série S, le troisième de la série T, suivant les lois bien connues du binôme de Newton.

On peut donc figurer les coefficients d'une forme quelconque par la formule générale N — S + T — Q + U — W, etc.; mais, chaque rangée étant symétrique, on retrouve un même nombre dans la même rangée pour deux séries également éloignées du terme médian. Donc, la formule précédente équivaut, par exemple, avec 5 coefficients, à celle-ci : N — S + T — S + N ; avec 6 coefficients, à celle-là : N — S + T — T + S — N.

Pour la même raison, le 2e nombre de la série N est identique au 1er nombre de la série S ; le 3e de la série N au 1er de la série T, etc. Chaque nombre apparaît donc aux deux extrémités d'une même rangée : les nombres qui figurent dans les termes intermédiaires figurent en outre une ou deux fois, suivant qu'il s'agit d'une rangée d'ordre pair ou d'ordre impair. (Nous considérons la 1re rangée comme formée par l'entre-croisement des deux unités; la 2e répond alors au nombre 2 et au carré du binôme (1—1).

***

Les formules des trois séries fondamentales reposent, comme on l'a vu, sur le développement d'un binôme constitué par une différence. Or la différence est, ainsi que le fait ressortir le calcul de Grassmann, l'expression spatiale de la distance, c'est-à-dire de la séparation entre des éléments de l'espace, par opposition au produit, qui est l'expression de l'étendue occupée par un élément. C'est donc le principe de la distance et de l'algorithme sommation qui se révèle comme le substratum passif des formes régulières. Mais ces formes seront réalisées par l'élévation aux puissances (algorithme graduation), qui est l'expression par excellence de l'intensification. La combinaison de ces deux principes opposés à des degrés divers se manifeste par l'algorithme reproduction, qui, s'alliant aux deux autres, formera tous les termes des développements. En effet, chaque terme du développement contient un produit formé 1° des deux termes du binôme originaire, avec des exposants croissant et décroissant en sens inverse, et don-

nant pour chaque terme une somme constante et égale au degré du polynôme ; 2° d'un coefficient qui exprime la somme des combinaisons 1 a 1, 2 a 2, 3 a 3, *m* a *m* des *m* premiers nombres (*m* étant le degré du polynôme). Or ce degré est déterminé par le nombre des dimensions Il lui est égal, pour les séries hexaédriques et octaédriques ; il l'excède d'une unité pour la série tétraédrique.

Ainsi, les formes régulières de ces trois séries sont engendrées par trois principes : deux polaires, représentés par les termes du binôme, déterminés par l'opposition individualiste de distance et universalisés par l'élévation aux puissances ; l'autre, intermédiaire, issu du principe des dimensions, principe défini par la combinaison du contraste et de la continuité spatiale, comme nous l'avons vu.

Les deux termes du binôme originaire, avec leur élévation à des puissances croissant en sens inverse, représentent deux systèmes de liaisons d'influence opposées, l'un ayant son maximum d'intensité dans l'isolement des éléments inétendus et ponctuels, l'autre, au contraire, ayant son maximum dans les éléments les plus concrets et réalisant le summum d'étendue. Dans chaque ordre dimensionnel, les formes régulières de ces trois séries (c'est-à-dire les formes rectilinéaires et anguleuses, mais centrées et ayant tous leurs éléments de même ordre égaux entre eux)(1) sont donc réalisées par ces deux courants inverses d'influence, qui équilibrent le principe de la distance et de la discontinuité avec celui

(1) Hypoténuses d'angles droits opposés par le sommet.

de la grandeur et de la continuité. La transition de la discontinuité à la continuité est opérée par les coefficients, puisque leur série représente successivement : la somme des *m* premiers nombres, puis la somme de leurs produits 2 a 2, puis celle de leurs produits 3 a 3, etc.; enfin, le produit général des *m* premiers nombres ; autrement dit la combinaison graduelle des dimensions d'abord isolées.

***

La série tétraédrique est exprimée complètement par le seul développement de son binôme (1—1), dont la résultante sera toujours zéro. Et l'on sait que telle est la condition de toute forme fermée.

Le binôme des deux autres séries qui est $\pm$ (2 — 1) ne donne pas ce résultat : pour obtenir les formes fermées de ces deux séries, il faut donc ajouter au développement de ce binôme les puissances de $\pm$ 1 avec un signe tel que la résultante soit toujours zéro. Ainsi, le binôme de ces séries conjuguées, considéré isolément, ne représente pas des formes fermées. Remarquons que, l'un de ses termes étant le double de l'autre, il y a asymétrie dans l'opposition des deux systèmes de liaison, l'un tendant à vider l'espace et à isoler les éléments, l'autre tendant à remplir l'étendue et à réunir les éléments. L'équilibre de ces deux séries ne vient pas du jeu pur et simple de l'opposition binaire; il nécessite l'intervention des puissances de l'unité indépendante, c'est ainsi un équilibre quaternaire. On peut concevoir le binôme de ces deux séries comme exprimant : sous sa forme positive (2 — 1), c'est-à-dire dans la série hexaédrique, le parallélisme ; et, sous sa forme, négative,

(1 — 2), c'est-à-dire dans la série octaédrique, l'antiparallélisme déterminé par l'entre-croisement crucial des perpendiculaires (1). L'unité indépendante, toujours positive dans la série hexaédrique, et toujours de signe contraire au terme des sommets, qui est alternativement positif et négatif, combat leur isolement,et transforme en élément concret la distance maintenue par le parallélisme. Cette unité indépendante, alternativement positive et négative dans la série octaédrique, et toujours de signe contraire au dernier terme qui exprime l'élément enveloppe de la forme,rend concrète la forme qui est vide d'après la genèse de cette série. Elle ramène toujours à la limitation définie la tendance de cette série, dont les formes tendent à se retourner sur elles-mêmes (1).

On remarquera que la série tétraédrique, la seule qui tire son équilibre du développement de son binôme, doit cette prérogative à l'anticipation dont elle jouit par rapport aux dimensions. En effet, son binôme est toujours élevé à la puissance $(n + 1)$, la dimension étant n. Elle tire donc le pouvoir de se clore elle-même de ce qu'elle sort de l'ordre ponctuel. Au contraire, les deux autres séries ne naissent que dans la 1re dimension, et proviennent donc du principe de translation. Elles ne peuvent donc centraliser que par l'intervention d'une influence étrangère. Et il est à remarquer que le binôme tétraédrique, élevé au carré, c'est-à-dire au degré qui correspond pour lui à la 1re dimension donne $(1 - 2 + 1)$,

---

(1) On peut se représenter cette tendance d'une façon schématique par le contreparallélogramme

c'est-à-dire exactement la formule des deux autres séries dans la 2e dimension. Les trois formules indiquent pour la 1re dimension un centre, deux sommets et une ligne. Mais, dans la ligne tétraédrique, les sommets sont également liés au centre et à la ligne ; dans la ligne hexaédrique, ils ne sont liés qu'à la ligne ; dans la ligne octaédrique, qu'au centre. Ainsi, le principe centralisateur et le principe d'expansion paraissent synthétisés dans la série tétraédrique ; c'est sans doute pour cela que cette série est sa propre conjuguée, et que tous les termes de ses développements sont symétriques par rapport au terme central. Au contraire, dans les deux autres séries, dont l'une est conjuguée à l'autre, en sorte qu'elles s'expriment toutes deux par la même formule lue dans les deux sens opposés, le principe centralisateur et le principe expansif sont seulement juxtaposés; l'un d'eux reste étranger au principe intermédiaire ou dimensionnel, l'autre s'y combine.

***

Le binôme (1 — 1) constitue l'apport commun du principe dimensionnel, qui correspond à l'algorithme des combinaisons ou des factorielles incomplètes.

On remarquera : 1° que la série tétraédrique partant de la dimension (n — 1) prend dans chaque dimension pour coefficients la rangée qui suit immédiatement celle qui s'applique aux deux autres séries, toutes deux originaires de la 1re dimension. Ainsi, la 3e dimension de la série tétraédrique est donnée par la rangée (4. 6. 4), celle des deux autres séries par la rangée (3. 3). — La série octaédrique prend pour les sommets, arêtes,

faces, etc, les termes du rang oblique immédiatement précédent à celui qui s'applique aux deux autres séries : cela provient de la situation inverse de l'élément indépendant occupé dans la série octaédrique et dans la série hexaédrique. Enfin, pour les séries hexaédriques et octaédrique, un des termes extrêmes est exprimé par 2^n, qui multiplie le coefficient $(+1)^n$ ou $(-1)^n$, constituant les deux rangées obliques extrêmes, qui viennent s'entre-croiser au sommet pour former le binôme type $(1-1)^n$. — L'analyse précédemment faite des formules des 3 séries nous dispense d'insister sur la signification de ces différences que nous avons déjà examinées.

Si l'on dépouille les formules des séries hexa et octaédriques du facteur 2 avec ses diverses puissances, il reste le développement du binôme (1 — 1). Pour la 3e dimension, on aurait $(1-1)^3$ (tandis que, dans la série tétraédrique, elle correspond à $(1-1)^4$. Cela donnera donc l'une des deux figures suivantes :

1° 1 centre, 3 sommets, 3 arêtes, 1 face, pas de volume ; 2° Pas de centre, 1 sommet, 3 arêtes, 3 faces, 1 volume. La 1re est un triangle, la 2e, un trièdre.

Le facteur 2, avec ses diverses puissances, multiplie les nombres et donne un octaèdre avec le triangle, un hexaèdre avec le trièdre. Et, comme $(1-1)^3$ ne donne que 4 termes et que les polyèdres en comportent 5, il reste un terme qui est fourni par l'unité indépendante $(\pm 1)^n$, qui représentera le centre pour la série hexaédrique, la forme pour la série octaédrique. Cette unité rompt la symétrie qui existe entre les deux séries obtenues en faisant croître les puissances de 2 en sens opposés dans l'un et dans l'autre.

Coefficients des séries hexaédriques et octaédriques

1e Dimension
2e Dimension
3e Dimension
4e Dimension
5e Dimension
etc.

Coefficients de la série tétraédrique

1e Dimension $(1-1)^2$
2e Dimension $(1-1)^3$
3e Dimension $(1-1)^4$
4e Dimension $(1-1)^5$
5e Dimension $(1-1)^6$
etc. $(1-1)^7$
$(1-1)^8$
$(1-1)^9$
$(1-1)^{10}$
$(1-1)^{11}$
$(1-1)^{12}$

Suite naturelle des nombres
Suite des sommes
Suite des nombres triangulaires
Suite des Q
Q Suite d'
U d'
d'
Coefficient des formes pour la série tétraédrique hexaédrique octaédrique
1er terme du développement de la série tétraédrique et octaédrique
Coefficient des sommets de la série hexaédrique
Coefficients des arêtes pour la série
Coefficients des sommets pour les séries tétraédrique et octaédrique
Coefficients des faces pour la série hexaédrique
Coefficients des arêtes pour les séries tétraédrique et octaédrique
Coefficients des volumes pour la série hexaédrique
Coefficients des faces pour les séries tétraédrique et octaédrique

1 - 1
= 1e 2e 2 = 1e 2e
3 3
4 6 4
5 10 10 5 (hexaédrique)
6 15 20 15 6 (hexa octa. tétraed. octaéd.)
7 21 35 35 21 (tétra) 7 (hexa octa)
8 28 56 70 56 28 (tétra) 8 (hexa octa)
9 36 84 126 126 84 36 (tétra) 9 (hexa tétra octa)
10 45 120 210 252 210 120 45 (tétra octa) 10 (hexa tét. oct.)
11 55 165 350 449 449 350 165 55 11 (hex t. o.)
12 66 220 515 772 884 772 515 220 66 12
etc etc

Coeff. etc

Tableau des coefficients du binôme $(1-1)^n$
avec son application aux 3 séries fondamentales des formes régulières

Ces 2 séries manifestent l'influence d'un 4e principe celui des puissances successives de 2, se superposant aux deux principes du vide et du plein exprimé par le binôme, et du principe dimensionnel manifesté par les coefficients du développement. Cette intervention du 2 équivaut, au point de vue de la génération des formes, à élever d'un degré l'effet du développement du binôme, car deux points constituent une ligne, et ainsi, tout élément ponctuel se trouve transformé en élément linéaire.

Répartition des puissances de 2 dans les séries

		Centre	Sommets			Forme
Série hexaédrique	$+ \boxed{1}$	2^n	2^{n-1}	2^1	2^0	
Série octaédrique		2^0	2^1	2^{n-1}	2^n	$\pm \boxed{1}$
		Centre	Sommets			Forme

Liaison de la génération continue et de la génération discontinue

L'application des formules combinatoires à la génération des polyèdres montre dans cette génération l'application géométrique d'une grande loi qui domine l'algorithmie, et sur laquelle est basée toute la théorie des équations. Cette loi, dont Wronski a seul, je crois, mis en évidence l'importance philosophique, est que toute génération par sommation correspond à une génération équivalente, par graduation et réciproquement. Autrement dit, on peut toujours poser :

« $A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \text{etc.} + A_\omega x^\omega$
$= (x+a)\ (x+a_2)\ (x+a_3)\ldots\ (x+a_\omega)$

dans lesquelles les ω quantités A_0 A_1 A_2, déterminent les ω quantités $a_1\, a_2\, a_3 \ldots a_\omega$ quelle que soit la valeur arbitraire de x, et réciproquement.» (1).

Dans une telle génération, le coefficient A répond aux nombres de la série S ou sommes des nombres consécutifs. Tous les nombres de cette série répondent au demi-produits de 2 nombres consécutifs, dont la formule est $\frac{n\,(n-1)}{2}$; de la sorte qu'en donnant à n toutes les valeurs entières, on obtient tous les termes de la série S.

De la même manière, la série T correspond à la formule $\frac{n\,(n-1)\,(n-2)}{1 \times 2}$, etc. Et ainsi, les séries sont équivalentes aux factorielles; autrement dit, les diverses superpositions de la sommation aux diverses combinaisons de la graduation. Nous n'avons pas ici à nous étendre sur ce principe. Il s'agit simplement de montrer comment les polyèdres le traduisent géométriquement. Cela met en évidence l'équivalence de deux modes de génération géométrique, l'un par substructions, l'autre par coordinations. Le premier manifeste l'élément de contraste établi par les directions ; le second, l'élément de continuité apporté par les étendues qui relient les directions. A l'algorithme de la sommation et des séries correspondra la génération par directions, par intersections ; à l'algorithme de la graduation et des factorielles correspondra la génération par translations combinées plus ou moins à la rotation.

---

(1) DE MONTFERRIER. — *Encyclopédie mathématique,* d'après les principes de la philosophie des mathématiques de Hœné Wronski (t. II).

La liaison des deux algorithmes fondamentaux montre que l'on peut construire tous les éléments géométriques, soit par superposition de plusieurs éléments, soit par transport d'un élément d'ordre inférieur (1).

***

Pour nous en tenir aux degrés les plus simples des algorithmes de sommation et de graduation dans leur forme universelle, considérons simplement les sommes Σm et les produits m ! des nombres consécutifs en partant de l'unité.

La formule générale $\Sigma m = (1 + 2 + 3 + 4 ... + m)$, dont les diverses valeurs constituent la série S, indique que chaque ordre dimensionnel nouveau apporte autant d'éléments de l'espèce considérée qu'il y a d'ordres précédents. Ainsi, le 4e ordre ajoutera 4 éléments aux 6 qui proviennent de la réunion des 3 ordres précédents, réunion opérée de la même manière.

On voit que c'est là une généralisation du processus sommation, dont le type élémentaire consistait dans l'addition d'un seul élément dans chaque ordre nouveau. Ce processus Σm est réalisé par les seconds termes de la série tétraédrique, le premier étant celui de l'addition élémentaire. Les 3es termes donneraient la série T, qui représente la généralisation du processus Σm considéré alors comme élémentaire.

---

(1) Les principes métaphysiques qui se font jour ici sont de la plus haute importance. Nous ne pouvons nous en occuper incidemment réservant ce sujet pour plus tard.

La série octaédrique et la série hexaédrique doublent le processus Σm, la première pour ses sommets, la seconde pour ses éléments enveloppes. Tous les autres termes développent la même loi de duplication au moyen des puissances successives de 2. Et enfin, dans leur terme extrême (2^n), ces séries apportent autant d'éléments que la précédente dimension en contenait.

Considéré au point de vue de l'algorithme Σm, le triangle équilatéral apparaît comme formé par la synthèse d'un sommet et d'une base, et ainsi de suite pour toute la série tétraédrique.

L'octaèdre rattaché au triangle par ses arêtes apparaît comme formé par 4 triangles parallèles deux à deux, les 8 autres faces étant déterminées par les précédentes. La formule est ici $2^2 \times 3$ (le 3 de la série S). Bien que le nombre 6 figure aussi dans la série S au rang suivant, les sommets de l'octaèdre ne sont pas obtenus ici par l'algorithme $\Sigma m_3 = 1 + 2 + 3$, mais par $2^1 \times 3$ (le 3 de la série N), ce qui représente une génération par 2 moitiés symétriques de deux groupes de trois points donnés simultanément et non, comme pour les arêtes, par l'opposition du point à la ligne.

Les faces de l'hexaèdre 2×3 (le 3 de la série S) proviennent de l'algorithme $\Sigma m_2 = (1 + 2) \times 2$, donc de 2 groupes de 3 faces contiguës formant un trièdre, et non de 3 faces reliées 2 à 2 par une arête (ce qui donnerait 8 arêtes et n'en laisserait que 2 pour le complément).

Il serait fastidieux de prolonger ces analyses. Il suffit de montrer comment, à chaque algorithme capable de réaliser les nombres relatifs aux formes qui

nous occupent, correspond un processus géométrique qui met en évidence une propriété des figures.

***

L'algorithme des factorielles se trouve, par rapport à l'élévation aux puissances ou graduation élémentaire, dans le même rapport que l'algorithme des sommes relativement à l'addition de l'unité. Or l'élévation aux puissances s'exprime géométriquement par la reproduction continue de l'élément qui sert de base, parallèlement à lui-même, et se prolongeant, suivant la direction perpendiculaire, sur une étendue égale à celle de la base. Dans la génération des formes régulières dont nous nous occupons, la ligne est considérée comme déterminant deux sommets par ses extrémités. Le développement des puissances de la ligne en fonction des sommets est donc le développement des puissances de 2. Mais il ne faut pas oublier que si, dans une ligne, on considérait en outre comme sommet le point milieu, la série hexaédrique se développerait suivant les puissances de 3, en comptant comme sommets tous les éléments médians.

Dans la série octaédrique, l'élévation aux puissances s'applique aux éléments d'ordre (n — 1), ce qui correspond aux faces pour l'octaèdre. Il y a, dans cette génération, une hétérogénéité qui introduit dans la géométrie la notion de quantité complexe d'une manière analogue à ce qui arrive en algèbre. Il faut donc considérer les faces de l'octaèdre, et généralement les éléments d'ordre (n — 1) dans cette série, comme formés par un processus régressif, autrement dit comme les

racines d'une base, et géométriquement comme les projections des éléments d'ordre n dans la dimension (n — 1). Ainsi, les faces de l'octaèdre seraient les intersections des volumes d'une forme à 4 dimensions qui prolonge la série octaèdrique. Cela confirme encore le caractère que nous avons reconnu à cette série d'après sa formule, dans laquelle la forme réalisée ne provient pas du développement du binôme, qui ne donne qu'une charpente. De la même manière, la croix perpendiculaire sera la projection des faces dans un plan également incliné sur chacune d'elles.

D'après ces observations, l'algorithme des factorielles appliqué aux sommets devra exprimer le développement d'une forme parallèlement à elle-même en se dilatant ou en se contractant en même temps jusqu'à ce que l'étendue de la base soit réalisée suivant cette direction oblique. Ainsi, la ligne à 2 sommets engendrera un trapèze.

Remarquons ici la distinction à établir entre l'algorithme des factorielles et la simple multiplication de facteurs inégaux. Cette dernière donnerait les formes rectangulaires, parce qu'on y considère les facteurs comme n'étant produits par aucune loi commune, et leur combinaison, comme l'unification de deux éléments étrangers. Dans les factorielles, au contraire, tous les facteurs résultent du développement de la même loi, loi qui consiste dans la variation appliquée à la base de l'algorithme des puissances. Ainsi, les factorielles appliquées aux sommets auront pour schéma le rayonnement et pour germe infinitésimal l'angle aigu ou obtus.

Il en résulte que toute factorielle en se développant doit amener la clôture d'une suite de formes, quand

l'angle dépasse 0° ou 180°. Mais on pourrait alors concevoir le prolongement de ces suites par des formes retournées dont la convexité se porterait à l'intérieur, et vice versa, formes qui seraient inscriptibles dans la pseudo-sphère.

La première factorielle se réduit à l'unité. Cette unité peut provenir d'un amas de quantités ; elle exprime l'unification d'une collectivité, unification nécessaire au développement de toute graduation. Donc, si l'on part de la 1re dimension, celle-ci ne contiendra qu'un seul sommet et non une ligne. — Dans la 2° dimension, celle des surfaces, il y aura 2 sommets, donc seulement une ligne. Mais cette ligne est considérée en fonction de la 2e dimension, elle exprime donc un élément empiétant virtuellement sur la 2e dimension, et cela correspond au module de la ligne complexe : $m = \sqrt{a^2 + b^2}$, contraction dans la 1re dimension d'une ligne brisée. Le point placé dans la dimension linéaire est alors le point complexe, germe de l'angle droit. Les 2 sommets réalisés dans la 2e dimension sont donc terminaux d'une même arête de l'octaèdre qui sera réalisé dans la 3e dimension. Donc, à ce point de vue, l'octaèdre est engendré par rayonnement autour des 2 sommets.

Le Nombre Six

S'il existe toujours une fonction de factorielles (généralement fractionnaire) correspondant à une sommation quelconque obtenue par les séries S T Q U, etc., il n'y a, par contre, qu'un seul nombre qui réponde à la

fois au développement sommatoire élémentaire des nombres consécutifs partant de l'unité et à la factorielle élémentaire constituée par le produit des mêmes nombres ; autrement dit, un seul nombre satisfait à l'égalité :

$$1 + 2 + 3 + ... + n = 1 \times 2 \times 3 \times .. \times n \text{ (soit à } \Sigma\, n = n!)$$

Ce nombre est 6 et répond à n = 3.

Le nombre 6, somme et factorielle des 3 premiers nombres, figure en 3e dimension dans les 3 séries fondamentales de polyèdres. Il est le seul nombre qui figure à la fois à ce double titre dans la même dimension. Comme coefficient de la 4e puissance du binôme, autrement dit, comme somme des 3 premiers nombres, il répond aux arêtes du tétraèdre, élément intermédiaire de cette forme. Dans les deux autres séries, il apparaît comme double de 3, et ne se rattache, dans la réalisation des sommets de l'octaèdre et des faces de l'hexaèdre, que d'une manière plus ou moins indirecte à la série S, ainsi que cela a été vu. Son lien avec l'algorithme des factorielles est également indirect dans ces 3 cas, puisqu'on a soit 1 + 2 + 3, soit 2 (1 + 2), soit 2 (1 × 3) et jamais 1 × 2 × 3.

Malgré cela, la coïncidence remarquable qui s'accomplit ici manifeste le nombre 6 comme prépondérant dans l'établissement des formes régulières, autrement dit, dans le lien du processus divisionnel et discontinu avec l'homogénéité de forme.

Le nombre 6 relie la graduation continue à la sommation discontinue dant l'état le plus élémentaire de leurs modes universels ; il apparaît comme la réunion systématique des deux principes, l'un actif et unitaire, l'autre passif et plural, qui se manifestent dans toute création.

En 2e dimension (3e ordre ponctuel), cette prépondérance est manifeste dans l'hexagone, dont le côté, étant égal au rayon du cercle, crée la division la moins discontinue dans la continuité circulaire. Cette division réalise, comme l'établit M. Ch. Henry, le contraste successif minimum. Autrement dit, elle représente, dans la simultanéité, ce qui fera le moins obstacle à la succession. C'est le nombre le plus apte à réaliser la stabilité mobile qui caractérise la Vie. C'est le nombre de l'harmonie des formes, le nombre de la beauté, Tiphereth ; car la Beauté est la synthèse du continu sensible et du discontinu conceptuel, de la variété dans l'unité, du mouvement au sein du repos !

Avec la 3e dimension (4e ordre ponctuel) et dans les séries hexaédrique et octaédrique, le nombre 6 est amené par le processus quaternaire de la perpendicularité, autrement dit, par le développement du contraste maximum simultané, qui tend à se rapprocher du contraste minimum successif. Dans ce processus apparaît le principe du retour du quaternaire vers le ternaire, manifesté ici par le triangle, face commune au tétraèdre et à l'octaèdre et par le trièdre, angle commun au tétraèdre et à l'hexaèdre. Le développement n'est donc pas arrêté, et la stablité du quaternaire, en se contractant dans le senaire, au lieu de s'élever à une nouvelle puissance, tire de lui la possibilité d'un développement indéfini. Mais, dans la 4e dimension, lorsque 6 et 4 se combinent sans contraction pour donner 24, la suite est close avec ce plein épanouissement, où les contrastes successifs se combinent aux simultanés, et les contrastes maximum aux contrastes minimum.

Le 24-édroïde

Dans la 4e dimension, c'est le 24-édroïde qui fait suite à l'octaèdre au point de vue des factorielles appliquées aux sommets, et non les formes de la série octaédrique. Appliqué aux éléments d'ordre (n — 1), l'algorithme des factorielles donnera, pour la 2e dimension, deux arêtes opposées de l'hexaèdre ; dans la 3e dimension, il répondra aux faces de l'hexaèdre. La génération est ici régressive, et les faces sont les plans d'intersection des volumes enveloppant une forme à 4 dimensions, qui n'appartient pas à la série hexaédrique, mais qui est encore le 24-édroïde. Le 24-édroïde répond à l'algorithme factorielle par ses 2 termes extrêmes, sommets et volumes. Il prolonge donc à ce point de vue l'octaèdre pour les sommets, l'hexaèdre pour les éléments d'ordre (n — 1). Sa formule est symétrique comme celle de la série tétraédrique. La voici :

24 sommets — 96 arêtes + 96 faces triangulaires — 24 octaèdres.

Chaque sommet donne naissance à 8 arêtes, si dans la 4e dimension toute arête ne réunit que 2 sommets ; chaque sommet appartient à 12 faces, chaque arête est commune à 3 faces, chaque sommet touche à 6 octaèdres, chaque arête appartient à 3 octaèdres ; chaque face à 2 octaèdres.

Aucune forme de la 5e dimension ne continue cette suite.

Le 24-édroïde synthétise ainsi les deux polyèdres conjugués : octaèdre et hexaèdre dans la 4e dimension.

Le quaternaire apparaît prépondérant dans cette forme, car 24 est la 4e factorielle, et 96 = 24 × 4.

Dérivant de l'octaèdre quant à ses éléments (triangles octaèdres) il procède de l'hexaèdre par leur distribution.

24 = 1 × 2 × 3 × 4 en passant par 6 dans la 3e dimension, c'est-à-dire par l'octaèdre ; en fonction des sommets, 24 réalise pour la 4e dimension l'algorithme des factorielles, dont la formule est n ! L'octaèdre répond à la même formule pour la 3e dimension (1, 2, 3 = 6). On découvre ainsi la nature spéciale du lien par lequel le 24-édroïde se rattache à sa souche dans la 3e dimension. L'octaèdre nous apparaît ainsi sous un autre jour, indépendant du développement des produits du nombre 2 : à ce titre, il aurait pour origine dans la 2e dimension, non pas un polygone mais une figure à 2 côtés, un angle répondant à la formule 1 × 2, soit à la moyenne. géométrique entre 1 et 2, c'est-à-dire $\sqrt{2}$, et par conséquent à l'hypoténuse du triangle rectangle isocèle Ceci confirme l'analyse précédemment faite au sujet de l'octaèdre.

Le 24-édroïde partage avec la série tétraédrique la propriété d'être son propre conjugué. Il occupe ainsi pour la 4e dimension seule une situation pour ainsi dire centrale. Ce caractère est d'autant plus marqué que son arête est égale au rayon de la sphère à 4 dimensions. Cette arête est en même temps celle de l'octaédroïde (série hexaédrique). Le 24-édroïde a donc tous les sommets de l'octaédroïde et 8 autres qui sont les sommets de l'hexadécaédroïde (série octaédrique). Il est ainsi formé par la réunion de ces deux formes conjuguées.

Il réalise ainsi dans la sphère à 4 dimensions un système

d'arêtes égales au rayon, système formé de pyramides quadrangulaires dont les bases donnent les arêtes de l'octaédroïde par leurs côtés, et les arêtes de l'hexadécaédroïde par leurs diagonales. Les octaèdres enveloppés sont groupés par 6 autour de chaque sommet, et les faces triangulaires sont formées par le concours de 3 cubes.

Le 24-édroïde réalise ainsi, en 4e dimension et à un degré plus éminent, la propriété que possède l'hexagone en 2e dimension, et qu'aucun polyèdre ne réalise en 3e dimension : celle de l'égalité de l'arête et du rayon. Cette propriété caractérise le minimum de contraste successif. Et, en 4e dimension, elle vient coïncider avec le maximum de contraste simultané marqué par l'angle droit ; et cela se réalise à deux degrés, d'abord isolément par la ligne angulaire (octaédroïde) et par le module (hexadécaédroïde), ensuite, par la synthèse des deux (1).

Rappelons la théorie de M. Ch. Henry sur les contrastes. 24 est, d'une part, le produit du minimum de contraste simultané avec une direction immobile ($^1/_8$), par le maximum de contraste successif ($^1/_3$) ; 24 est, d'autre part, le produit du maximum de contraste simultané ($^1/_4$) par le minimum de contraste successif ($^1/_6$). Et 24 représente ainsi le nombre maximum des divisions immédiates de l'unité réalisées successivement dans les deux sens. Le processus 8 × 3 exprime bien

---

(1) Ces propriétés du 24 edroïde ont été découvertes par M. Stringham. Voir : *Regular figures in n dimensional space*. American journal of mathematics, vol. III.

l'octaèdre combinant le trièdre axial rectangle avec 8 triangles équilatéraux ; le processus 6 × 4 semble révéler une disposition des 24 octaèdres dans la 4e dimension, disposition qui procède de l'hexagone et du carré.

Le nombre 24 est donc la combinaison deux à deux des deux maximum avec les deux minimum de contraste, l'un des facteurs étant dans la simultanéité, l'autre dans la succession. Cette fonction synthétique très remarquable exprime la tension de la distance alliée à la liaision de la vitesse en même temps que la tension de la durée alliée à la liaison de la continuité Elle semble donc destinée à clore une série.

Le 24 édroïde réunit le principe de la perpendicularité appliqué aux axes et aux enveloppes. Il réalise donc dans toute sa plénitude le contraste simultané. Le caractère quaternaire du contraste simultané paraît expliquer pourquoi la suite du 24-édroïde ne se prolonge pas dans la 5e dimension. Le cycle de quatre dimensions semble épuiser le principe du contraste simultané, comme le cycle de 4 angles droits l'épuise dans la 2e. Ce qui fait différer le cycle quaternaire dimensionnel du cycle quaternaire plan, c'est que, dans le premier, les 4 directions perpendiculaires sont unilatérales ; dans le second, elles sont bilatérales. Dans le cycle plan, la centralisation ponctuelle persiste ; dans le cycle dimensionnel, le centre se dédouble en 2 points virtuels qu'on peut assimiler aux deux points de l'infini i. j, de la géométrie projective. Cela montre l'épanouissement terminal de la centralisation quaternaire.

Eléments complexes et diagonaux

D'une manière générale, la notion d'élément complexe consiste à classer un objet dans une espèce dont il outrepasse les conditions. Pour y parvenir, il faut, ou bien substituer à l'objet donné un autre objet qui en procède, et qui soit réduit aux conditions de l'espèce donnée, ou bien modifier la notion de l'espèce en élargissant les conditions qui la déterminent. En géométrie, l'élément complexe est celui qu'on définit en fonction d'un ordre dimensionnel qui lui est inférieur. Ainsi, la dimension linéaire est caractérisée par l'unité de direction ; tout angle la déborde et amène l'ordre des surfaces. Mais, si l'on fait abstraction de l'étendue superficielle inévitablement déterminée par l'ensemble de deux lignes qui se coupent, pour ne considérer que le parcours brisé et purement linéaire qui détermine l'angle, il est clair que les éléments constitutifs (côtés) peuvent, chacun isolément, être contenus dans la dimension linéaire, et qu'ils n'empiètent sur la dimension surface qu'à raison d'une disposition ne résultant pas de la nature des lignes, mais émanée d'un principe étranger. Tenant alors cette disposition pour relation accidentelle, et, ne prenant l'ensemble des éléments que comme collection d'objets de même nature, on considère la ligne brisée comme contenue tout entière dans la première dimension, en élargissant la notion de dimension linéaire. Ou bien on substitue à la ligne complexe la représentation qui en résulte dans la dimension linéaire, à raison de sa dis-

position. Cette représentation efface en partie les caractères de la ligne brisée, et restreint sa longueur. C'est sa projection en un sens général, son module, si on choisit pour ligne droite celle qui passe par es extrémités de la ligne brisée.

C'est aux éléments complexes que nous avons rattaché l'octaèdre, en le faisant procéder non du carré, mais de la croix perpendiculaire, et dans la 1re dimension, en le tirant de la ligne complexe à angle droit, représentée soit par les deux côtés de cet angle, soit par l'hypoténuse du triangle rectangle isocèle. Généralisant ce principe, tous les éléments périphériques ou enveloppants des formes de la série octaédrique sont considérés comme les projections d'angles au centre de divers ordres formés par des axes perpendiculaires entre eux. Le principe génétique de cette série consiste dans une construction axiale, les éléments périphériques n'étant que le résultat de ces axes ; il en résulte un caractère de vacuité et de schématisme que nous avons déjà remarqué.

***

Entre les deux principes polaires de génération axiale et de génération périphérique se place le principe intermédiaire de génération diagonale. Toute diagonale peut, en effet, être considérée comme la projection d'une ligne brisée. Elle est l'expression modulaire d'une ligne complexe qui correspond à une racine $m^{\text{ième}}$ de (— 1). La ligne complexe trigonométrique basée sur la projection perpendiculaire est le cas le plus simple du genre.

Généralisant cette notion, on peut concevoir des éléments diagonaux, axiaux, ou périphériques, de divers ordres : plans, volumes, etc. Le caractère général des éléments diagonaux sera toujours de substituer un élément rectiligne à un élément complexe ou angulaire, et d'abaisser ainsi l'ordre dimensionnel Les éléments axiaux et périphériques sont les cas-limites des éléments diagonaux. Les premiers divisent la forme en parties égales ; les seconds ne la divisent pas. Les autres éléments diagonaux divisent la figure inégalement ; mais s'il s'agit d'une forme régulière, les éléments diagonaux établis dans leur ordre consécutif reviennent au point de départ après un certain nombre de cycles, et circonscrivent ainsi des formes étoilées régulières, reliant les sommets non voisins par les voies les plus courtes. Les formes étoilées sont donc la manifestation du principe diagonal. Leur genèse s'accomplit, non par émission rayonnante et simultanée du centre, mais par un parcours périphérique successif, quoique réversible. Le principe diagonal rattache ainsi l'espace au temps. Le nombre des cycles qui détermine les formes étoilées possibles, introduit de plus dans l'espace les données du nombre et du rythme.

***

Les figures rayonnantes symétriques autour d'un point dont la croix perpendiculaire est le premier représentant, sont les symboles des forces, des directions, des concepts et de la spiritualité manifestée dans l'espace. Les figures convexes, au contraire, sont des symboles de matérialité, de capacité, d'étendue résistante

et soustraite à l'idée, qui n'entre en contact avec la matière que par cette limitation réciproque qui est la forme. Or les figures étoilées sont intermédiaires avec les deux espèces précédentes. Elles se construisent, non par émission du centre, non par expansion de l'unité immatérielle, mais par enveloppement comme les figures convexes ; elles tendent au maximum de périphérie avec minimum de capacité et à la jonction des points extrêmes par les plus courts chemins. Toute diagonale exprime ainsi une tendance de la matière vers la spiritualité, et toute forme étoilée manifeste l'imitation par la matière de la radiation immatérielle. C'est la matière attirée par l'unité spirituelle, mais toujours écartée par la force de rotation et assujettie à circuler.

A l'élément projetant ou diagonal correspond un élément projeté complexe, empiétant sur l'ordre dimensionnel supérieur. L'angulaison contenue dans l'élément projeté manifeste la tendance centralisatrice. L'élément complexe est le fondement des formes gauches. Eléments complexes, formes gauches et formes étoilées tendent, les unes et les autres, à enfermer une plus grande périphérie dans une moindre capacité. Elles représentent les deux faces d'un même processus : la forme gauche en exprime la tendance, la forme étoilée en marque la réalisation. Les formes gauches conservent la convexité, la tendance attractive, les formes étoilées deviennent rayonnantes et expansives. Le règne végétal représente le cas d'extrême limite des formes étoilées, car le centre y a disparu ; le noyau résultant de la formation cyclique par parcours périphérique ne s'y trouve plus, la formation purement

axiale autour du centre y est même dépassée et remplacée par la ramification, processus qui correspond à un transport continuel du centre de figure.

Les formes des animaux supérieurs sont généralement gauches. Dans l'animal qui est fortement individualisé, la tendance centralisatrice persiste et s'accentue, mais en cherchant économie de volume et facilité de mouvement, avec maximum d'étendue convexe. La structure gauche de toute l'enveloppe humaine est ce qui fait surestimer le volume de l'homme. L'élève sculpteur s'en rend bien compte, car il est porté à donner une épaisseur à des contours qui sont formés par des génératrices purement linéaires, et dont l'épaisseur est presque toujours nulle.

Le carré posé sur l'angle, qui est le plan de symétrie de l'octaèdre et l'octaèdre lui-même n'ont d'autres diagonales que les axes ou diamètres ; mais, comme les sommets non diamétralement opposés sont voisins, les diagonales axiales s'y confondent avec les arêtes. Néanmoins le carré posé sur l'angle et l'octaèdre peuvent être considérés comme la limite, comme le seuil de l'intervention du principe diagonal dans les polygones et dans les polyèdres.

L'hexaèdre ne possède pas le même caractère, car il donne des carrés par ses sections médianes, mais non par ses plans diagonaux. C'est avec le quinaire, nombre symbolique de la vie et de l'orientation au sein de l'espace, qu'apparaissent, dans le pentagone, le dodécaèdre et l'icosaèdre, les diagonales non axiales.

CHAPITRE II

Les suites limitées de formes régulières

Indépendamment des trois séries de formes régulières qui se prolongent à travers le *n* dimensions, la 3e et la 4e dimension présentent deux suites limitées et conjuguées entre elles. L'une comprend, en 3e dimension, l'icosaèdre (12 sommets, 30 arêtes, 20 triangles équilatéraux) auquel fait suite en 4e dimension le 600-édroïde (120 sommets, 720 arêtes, 1.200 triangles équilatéraux, 600 tétraèdres). L'autre comprend, en 3e dimension, le dodécaèdre (20 sommets, 30 arêtes, 12 pentagones réguliers) auquel fait suite, en 4e dimension, le 120-édroïde (600 sommets, 1.200 arêtes, 720 pentagones réguliers, 120 dodécaèdres). En outre, la 4e dimension possède le 24-édroïde dont nous avons déjà parlé.

Il a été démontré qu'au delà de la 4e dimension, ces suites ne se prolongent pas, et que seules persistent indéfiniment les 3 séries du tétraèdre, de l'hexaèdre et de l'octaèdre.

Description de l'icosaèdre et du dodécaèdre

L'icosaèdre a 6 axes (ou diagonales diamétrales) et 30 autres diagonales, qui forment des systèmes de

pyramides à bases pentagonales, de la même manière que les arêtes. En effet, si l'on prend pour axe le diamètre qui joint deux sommets opposés, considérés comme pôles, les dix autres sommets se répartiront autour des pôles sur deux plans parallèles et équidistants des sommets extrêmes. Ces plans diagonaux formeront 2 pentagones, les sommets de l'un se trouvant sur les méridiens qui se projettent sur le milieu des côtés de l'autre. Et, en joignant les sommets d'un des pentagones au sommet de l'autre, on obtient un décagone gauche formé par une ligne brisée dont les éléments s'inclinent les uns sur les autres à 60°, et qui partage le polyèdre en deux moitiés symétriques par une surface gauche, pour ainsi dire équatoriale. Les triangles équilatéraux formés par les diagonales engendrent, par leur intersection, l'icosaèdre de 7e espèce (c'est-à-dire le polyèdre obtenu au moyen de 7 cycles ou de 7 fois la projection sur la sphère circonscrite). Les pentagones bases des pyramides engendrent, par leur intersection, deux dodécaèdres de 3e espèce, l'un à face convexe l'autre à la face étoilée, suivant que l'on prend ces sec tions pentagonales comme pentagones convexes ou comme pentagones étoilés. Ces deux polyèdres établissent une transition entre les formes étoilées et les formes convexes.

L'icosaèdre présente des rapports assez étroits avec l'octaèdre, et paraît correspondre à des conditions plus complexes du même principe. Mais le degré de complexité du principe manifesté par l'icosaèdre s'accroît encore, si l'on considère le plan diagonal pour ainsi dire méridien, passant par les sommets pris pour pôles. On obtient alors un hexagone régulier gauche dont 4

côtés sont bifurqués, en ce sens que l'on peut, *ad libitum*, faire passer l'intersection par un côté ou par l'autre. Deux arêtes opposées de cet hexagone gauche, par exemple les arêtes 1 et 4, sont situées dans le même plan passant par l'axe des pôles. On pourra choisir les arêtes 5 et 6, soit du même côté de ce plan que les arêtes 2 et 3, soit du côté opposé, en sorte que l'intersection méridienne type consiste en une surface dont la portion qui sort du plan fondamental (l'élément gauche) se dédouble. On peut en exprimer le schéma par la figure $\overset{\Lambda}{\underset{|}{V}}$, sorte de cteis, se reliant aussi aux lettres Y et V, Y et v , Λ et λ, qui toutes évoquent le même ordre de principe, celui d'un dédoublement, d'une sorte d'éclosion qui dilate l'espace et tend à faire sortir une dimension entre deux autres. On pressent tous les mystères qui sont encore cachés dans l'essence géométrique de ces polyèdres ; et les rapprochements de ces symboles avec la genèse géométrique doivent aider à pénétrer certains principes fondamentaux du kosmos. Le développement genétique de l'espace (et par conséquent de tous les degrés de complexité d'existence phénoménale dont il est le schéma élémentaire) s'opère ici par un procédé nouveau. Ce n'est plus l'intensification potentielle de l'algorithme puissance qui superpose l'essence à elle-même, mais l'éclosion, la manifestation irradiée sortant de la virtualité, matrice mystérieuse dont l'obscur pouvoir nous échappe, et que nous confondons aisément avec le néant.

***

Le dodécaèdre possède quatre espèces de diagonales et 5 ordres de plans diagonaux. D'abord la jonction des 3 sommets voisins d'un sommet pris pour pôle donne des tétraèdres non réguliers mais à base triangulaire équilatérale. D'où 30 arêtes en tout.

2° La jonction aux sommets éloignés des faces contiguës au sommet polaire donne 5 diagonales qui sont les diagonales même des faces (côté du pentagone étoilé). En tout 50 diagonales de ce type. Réunies au pôle, elles forment 3 triangles équilatéraux autour de lui; mais la base de la figure est un hexagone formé alternativement par une arête et par une diagonale des faces. Les 3 triangles ainsi formés n'ont pas de côté commun. Si l'on joint deux à deux les sommets de l'hexagone précité, on obtient un triangle équilatéral;

3° La jonction du sommet polaire aux sommets les plus proches des faces les plus éloignées donne 5 diagonales. (En tout 50 diagonales de ce type.) On forme, en les joignant aux pôles et entre voisines, 6 triangles équilatéraux qui servent à former deux tétraèdres réguliers ; nous les nommerons diagonales tropiques.

4° La jonction du pôle à l'extrémité des 3 arêtes issues du pôle opposé donne 3 diagonales. De là, pyramide triangulaire allongée à base équilatérale. (En tout 30 diagonales de ce type.) Si l'on joint deux des sommets précités au pôle dont nous sommes partis, au moyen des diagonales des faces on obtient 3 pentagones réguliers convexes qui n'ont pas d'arêtes communes. Mais, si on prend les pentagones étoilés correspondants, on obtient un angle trièdre et leur ensemble donne le dodécaèdre étoilé de 7e espèce. Nous les nommerons diagonales arctiques.

5° Enfin les sommets s'opposent deux à deux aux extrémités de 10 diamètres ou axes

Le dodécaèdre est intersecté par un décagone gauche, dont le plan de symétrie est parallèle aux deux faces opposées. Les arêtes de ce décagone sont inclinées entre elles de 108°. L'ondulation est ici moins accentuée que dans l'icosaèdre. On peut le diviser aussi en dodécagone gauche ayant 8 côtés bifurqués, et 4 simples situés 2 à 2 dans le même plan, l'un des plans étant perpendiculaire à l'autre. On aura le schéma ci-contre, répondant au processus méridien ou dodécagonal avec le tracé plein ; et avec le tracé ondulé, le schéma équatorial ou dodécagonal représentant les demi-tracés de ces figures. Le demi-dodécagone est ici le schéma

Fig. 1



Fig. 1 *bis*



exagéré de la colonne vertébrale, et généralement de toutes les courbures résistantes à la pression. Il rappelle aussi le serpent qui dresse la tête. Bifurqué, Il forme un 8 surmonté d'une tige. Et si, au lieu du dodécagone entier on prend le dodécagone entier, la figure affectera la forme d'un bulbe avec étranglement terminé par une queue. Cela semble marquer la vibration

extrême tendant à se subdiviser. On se rapproche ici du premier stade d'évolution de la graine végétale et de la forme générale des animaux supérieurs caractérisés par deux segments principaux et un dernier relativement atrophié.

Relations des suites limitées avec le binôme fondamental

Il est difficile de découvrir d'une façon très sûre la loi qui règle les suites du dodécaèdre et de l'icosaèdre, car ces suites se bornent chacune à deux termes : un polyèdre et une forme à 4 dimensions. Les nombres dont il faut rechercher la provenance sont 12, 30 et 20 pour les polyèdres ; 120, 720, 1.200 et 600 pour les formes à 4 dimensions ; ils ne contiennent que les facteurs premiers, 2, 3, 5. On ne pourra donc les faire correspondre à aucune puissance du binôme excédant la 6e, car au delà apparaissent des facteurs étrangers. D'autre part il est impossible d'obtenir les formules cherchées par une seule rangée horizontale du binôme fondamental (1 — 1), multipliée par les puissances d'un facteur constant comme on l'a fait pour les séries hexaédrique et octaédrique. Mais on peut, en combinant les divers coefficients fournis par les 6 premières ou même les 5 premières puissances du binôme, obtenir tous ces nombres. On y parvient de plusieurs manières, qui chacune doivent correspondre à un procédé de construction géométrique.

Les polyèdres et les formes à 4 dimensions de ces suites, semblent former chaque ordre d'éléments (som-

mets, lignes, arêtes, faces, volumes), non par la multiplication pure et simple de ces éléments pris, chacun dans l'ordre spatial qui leur correspond, mais par réaction réciproque entre 2 et 3 ordres voisins au minimum, 4 et 5 au maximum. Par exemple, les arêtes d'une même face proviendront de l'intersection de plusieurs plans et non d'une simple distribution opérée dans le plan de la face. Elles se rencontreront dans un même plan, mais leur provenance impliquera pluralité de plan. Chaque élément plan sera ainsi le fragment d'un élément complexe. Nous avons rencontré, en effet, comme sections principales de l'icosaèdre et du dodécaèdre des polygones gauches, c'est-à-dire des éléments surfaces qui ne peuvent être contenus dans le plan et qui pénètrent dans la 3e dimension. Le nombre 20 cependant se trouve directement dans la rangée de la 6e puissance du binôme, et on peut aussi former 120 et 720 au moyen de cette seule rangée. Mais cette rangée correspond à l'ordre dimensionnel le plus élevé qui entre en jeu, et qui implique 5 ordres inférieurs des figures qui n'en contiennent que 3, 4 ou 5 ; par conséquent, la provenance est encore complexe.

La 6e puissance du binôme (1 — 1) représente les bornes des influences intervenantes dans les formes régulières à 3 et 4 dimensions. On pourrait même s'en tenir à la 5e puissance. C'est cette 5e puissance qui règle les formes à 4 dimensions de la série tétraédrique. Le multiplicateur 2, avec ses puissances, fait correspondre les degrés du binôme au degré des dimensions pour les 2 autres séries. Ici, il semble, au contraire, qu'il s'opère une régression. Ainsi, la multiplication des termes pris entre les 3e, 4e et 5e puissances donne des

formes à 3 dimensions seulement; mais ces formes peuvent s'obtenir en pénétrant dans les 2e et 6e puissances simultanément. C'est toujours la 4e puissance du binôme qui figure la zone moyenne. Remonter jusqu'à la 2e puissance revient à décomposer les résultats de la 3e ; autrement dit, à substituer, par exemple, à des figures à 2 dimensions les lignes qui les constituent. S'avancer jusqu'à la 6e puissance équivaut à considérer les figures de la 3e comme des projections d'éléments distribués dans un milieu à 5 dimensions.

Comme la plupart des facteurs numériques se répètent 2 et 3 fois dans les diverses séries N, S, T, Q; etc., les mêmes constructions numériques sont susceptibles de plusieurs procédés géométriques, et cela augmente encore le nombre des modes générateurs. Ainsi, 30 obtenu par 3 × 10 peut être considéré comme provenant de $3_N \times 10_S$; de $3_S \times 10_S$; de $3_N \times 10_T$, ou de $3_S \times 10_T$; autrement dit, 3 sommets empruntés à une figure relative à la 2e dimension combinée à 10 arêtes ou à 10 faces réparties dans les 3 dimensions, ou 3 arêtes prises dans une figure à 2 dimensions, combinées à 10 arêtes ou à 10 faces réparties dans les 3 dimensions. La formation de 30 par 5 × 6 ou par 2 × 3, 5 donnerait aussi plusieurs solutions.

Faisant $n = 3$ pour l'icosaèdre et le dodécaèdre, on peut établir les formules suivantes sous forme de factorielles.

Par tous ces caractères, les suites de l'icosaèdre et du dodécaèdre se distinguent nettement des 3 séries illimitées. Celles-ci se construisent par substruction des diverses dimensions et, dans chaque dimension,

par combinaison des éléments, suivant l'ordre des dimensions, la 2e se formant au moyen des éléments de la 1re, etc. Ici, au contraire, on constate une redistribution entre éléments empruntés à plusieurs ordres dimensionnels, se combinant entre eux, se condensant et se liant par des relations multiples et réciproques. Il y a là le schéma originaire fourni par l'espace pur (cette matrice de l'évolution), des tendances à la différenciation et à la sélection, tendances éveillées par la clôture du milieu où entrent en jeu diverses forces. Et il est très remarquable que ces formes géométriques correspondent, d'une part, aux schémas élémentaires des structures organiques, ainsi que nous l'avons déjà observé ; d'autre part, à l'introduction du nombre 5, caractéristique de la vie individualisée, dans les doctrines ésotériques.

***

Les formules très nombreuses qu'on pourrait établir d'après les combinaisons que nous venons de signaler, et qu'il serait fastidieux d'analyser, montrent comment les suites de l'icosaèdre et du dodécaèdre peuvent se construire par des combinaisons d'éléments tirés du système tétraédrique ; mais elles ne révèlent pas le principe genétique de ces formations, n'indiquent en rien la règle nécessaire pour les obtenir, et n'expliquent pas la cause de la limitation de ces suites à la 4e dimension. Il faudrait donc découvrir la formule typique qui exprime le processus, réalisant pleinement et exclusivement la construction de ces suites, et indiquant leur source.

Nous espérons, dans ce qui va suivre, approcher de la solution de ce problème, dont on va remarquer l'importance métaphysique.

Génération des Sommets de l'icosaèdre et du dodécaèdre

Prenant pour unité le potentiel du développement géométrique par les formes régulières à travers l'espace, et supposant que ce potentiel, primitivement condensé dans un centre, va projeter les sommets à travers l'espace en dépensant son énergie, on peut concevoir une foule de manières dont ce fractionnement d'énergie peut s'opérer (1). On suppose une série de divisions successives, dont chacune corresponde à un ordre dimensionnel. Cela posé, examinons quel mode doit correspondre à la genèse des sommets du dodécaèdre et de l'icosaèdre.

***

L'icosaèdre a pour section principale dans le sens équatorial un décagone gauche, et dans le sens méridien, un hexagone gauche avec 4 arêtes bifurquées. Le

(1) Nous ne préjugeons rien dans la nature de cette énergie : on peut la considérer soit comme une force plastique, soit comme une puissance cérébrale de construire les concepts de division spatiale ou de subjectivité suivant le degré de réalité, de matérialité ou de spiritualité qu'on attribue à l'espace.

dodécaèdre a pour section principale équatoriale un décagone gauche et, dans le sens méridien, un décagone gauche avec 8 arêtes bifurquées. Or l'hexagone inscrit a son côté égal au rayon, soit à l'unité ; mais on peut exprimer le rayon en fonctions trigonométriques de l'angle au centre de l'hexagone, soit de 60°; il est égal à la somme de la quantité complexe ;

$$\cos. 60 + \sin. 60 \sqrt{-1.}$$

c'est-à-dire à :

$$\frac{1 \pm \sqrt{-3}}{2}$$

Or cette quantité est égale aux deux racines cubiques imaginaires de l'unité. Cette valeur exprime en même temps le côté du triangle équilatéral construit sur le côté de l'hexagone. Le signe — du radical donnera le triangle conjugué de celui donné par le signe +. Ces triangles exprimeront l'arête de l'icosaèdre en fonction du cercle construit sur elle pour rayon, et non en fonction de la sphère circonscrite à l'icosaèdre.

D'autre part, le décagone inscrit dans un cercle de rayon unité a pour côté

$$\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

suivant qu'on prend le décagone étoilé (+) ou le décagone convexe (—). La première de ces valeurs répond au double cosinus de l'angle au centre du décagone convexe (36°) (ou en le changeant de signe du pentagone étoilé), la seconde au double cosinus de l'angle au centre du pentagone convexe (72°) (ou, en

le changeant de signe, du décagone étoilé). Cette quantité

$$\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

est encore le double de la partie réelle des racines imaginaires 5[e] de l'unité

Les racines cubiques imaginaires de l'unité sont les racines de l'équation

$$x^2 + x + 1^2 = 0.$$

La partie réelle des racines imaginaires 5[e] de l'unité sont, si on les multiplie par 2, les racines de l'équation

$$x^2 + x - 1^2 = 0.$$

Ces deux équations expriment l'une et l'autre le partage de l'unité en moyenne et extrême raison. La seconde répond au cas où la quantité à partager est réelle, car on a

$$x^2 = (1 - x) \times 1.$$

Elle donne pour solution

$$\frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

L'une de ces solutions est plus petite que l'unité ; l'autre, plus grande. Géométriquement, on porte la première dans le sens positif, la deuxième dans le sens négatif, à partir de l'origine. Si, dans cette équation, le signe du 2[e] terme (terme en x) était négatif, la 2[e] solution se porterait dans le sens positif. Dans tout ce qui va suivre, pour les deux équations ci-dessus, nous prendrons, pour simplifier, ce second terme comme positif ;

mais retenons que la possibilité de changer son signe nous permettra toujours d'obtenir les termes des formules que nous cherchons à établir avec le signe convenable.

La première équation répond au cas où la quantité à partager est imaginaire. En effet elle donne

$$x^2 + x = -1^2$$

et -1^2 ne peut provenir que d'une quantité imaginaire. Les solutions sont

$$\frac{-1 \pm \sqrt{-3},}{2}$$

soit les racines imaginaires cubiques de l'unité. Elles s'expriment géométriquement par les côtés d'un triangle isocèle de 120° au sommet, ayant pour axe la droite à partager, pour apothème, la moitié de cette droite.

Ces quatre quantités

$$\frac{-1 \pm \sqrt{5},}{2} \quad \frac{-1 \pm \sqrt{-3}.}{2}$$

exprimant des sinus et des cosinus, leurs numérateurs exprimeront les quantités doubles, donc des cordes. En multipliant 2 à 2 ces numérateurs, nous obtiendrons des quantités exprimant une figure embrassant les 4 quadrants du cercle. Ces numérateurs répondent aux équations du partage en moyenne et extrême raison dans laquelle on attribuerait à la quantité à partager la valeur 2. Les équations deviendraient alors $x^2 + 2x \pm 4 = o$.

Cela posé, faisons les produits deux à deux, d'une part, des expressions réelles, d'autre part des expressions imaginaires. Nous aurons :

$$(\sqrt{5} - 1)(\sqrt{5} + 1) = (\sqrt{5})^2 - 1^2 = 5 - 1 = 4$$

$$(-1 + \sqrt{-3})(-1 - \sqrt{-3}) = +1^2 - (\sqrt{-3})^2 =$$

$$1^2 - (-3)^2 = 1^2 + 3 = 4$$

Si nous considérons, comme nous l'avons indiqué, le partage en moyenne et en extrême raison comme s'accomplissant d'abord dans la 1re dimension, on voit que chaque racine réelle répondra à l'établissement d'un point sur une ligne réelle, soit dans la 1re dimension, et chaque racine imaginaire, à l'établissement d'un point sur une ligne complexe, empiétant donc dans la 2e dimension. Mais les deux produits distincts des racines donneront dans les deux cas une quantité réelle. Ce produit est naturellement du second degré ; il est égal à l'unité partagée, mais élevée à la seconde puissance, et traduite en élément-surface réalisé. Cet élément sera délimité par 4 points qui, résultant de deux facteurs inégaux, devront former les sommets de 2 rectangles ou de deux contre-rectangles-plans. Ces deux figures différeront naturellement l'une de l'autre par leurs proportions.

Or, le dodécaèdre et l'icosaèdre ont l'un et l'autre 4 sommets dans un même plan, et ces sommets sont donnés par les deux arêtes opposées ; la section passant par ces arêtes passe par le centre et donne des rectangles ou des contre-rectangles suivant qu'on envisage les périmètres ou les diagonales (1). L'octaèdre et l'hexaè-

(1) Il faut bien observer ici que toutes les quantités expriment des proportions de distribution d'une énergie, et que les opérations par lesquelles on les obtient révèlent les modes de distribution géométrique de cette énergie. Il ne faudrait pas prendre ces quantités comme exprimant des longueurs en fonction du rayon de la sphère circonscrite. Sans doute ces longueurs découlent du mode de distribution de cette énergie et par conséquent des équations dont nous nous servons mais la détermination de ces relations ne nous occupe pas ici, et le rapport existant entre les deux racines constructives des rectangles n'est pas égal à celui des longueurs des côtés.

dre ont aussi 4 sommets dans un même plan, mais ces 4 sommets donnent une section carrée et les formules les obtiennent soit par 2^2, soit par 2×2.

En construisant 3 contre-rectangles ayant pour axes 3 diamètres perpendiculaires de la sphère, l'icosaèdre se trouve déterminé par 6 arêtes opposant chacune une ligne à un sommet. Ce schéma rappelle ainsi celui de l'octaèdre et met en évidence une analogie de plus entre ces deux polyèdres. La formules des sommets de l'icosaèdre sera $3 (3 \times 1)$; nous choisissons (3×1) pour exprimer 4, parce qu'il répond au processus hexagonal propre à l'icosaèdre.

On déterminera le dodécaèdre par 5 rectangles (ou contre-rectangles) qui réaliseront 10 arêtes non contiguës. Chaque rectangle formera, avec ses deux voisins, un dièdre de 72°, et avec son opposé un dièdre droit. Leur ensemble formera une sorte de moulin partageant en 5 dièdres égaux le cycle hélicoïdal de la sphère. Cette structure paraît correspondre aux schémas des tourbillons, considérés comme la source de la matière atomique : elle se prête à la rotation spiraloïde et sphéroïdale à la fois. La formule adoptée pour les sommets du dodécaèdre sera $5 (5 - 1)$; nous exprimons 4 par $(5 - 1)$ parce qu'il répond au processus décagonal, plus intimement lié au dodécaèdre qu'à l'icosaèdre.

CHAPITRE III

L'algorithme des moyennes raisons

L'algorithme des deux suites conjuguées du dodécaèdre et de l'icosaèdre en fonction des sommets, autrement dit en fonction du principe centralisateur, est celui du partage d'une quantité en moyenne et extrême raison. C'est donc le cas parfait de l'algorithme des moyennes proportionnelles, le cas où une quantité tire de son sein propre un carré parfait équivalent au produit de son tout par l'excès ou le défaut de ce carré. Ceci montre la situation de ces suites en fonction de celle de l'hexaèdre et de l'octaèdre. L'hexaèdre est représenté par 2^n, l'octaèdre par $2\,n$; ici, nous avons $x^2 = a\,(a \pm b)$. Nous retrouvons comme dans l'hexaèdre l'algorithme-graduation, mais prenant pour exposant fixe la base de la série hexaédrique : le binaire ne s'y développe plus ; il fixe le degré de développement, et le 2e membre de la formule exprime , comme dans la série octaédrique, une reproduction, et, dans cette reproduction, l'un des facteurs est formé, comme dans la série tétraédrique, par une somme. Du reste, le pentagone donne pour la 2e dimension : $5 = n + (n + 1)$ $= 2\,n + 1 = n^2 + 1$.

La moyenne proportionnelle est le centre des librations de l'algorithme reproduction ; la moyenne raison d'une quantité représente ainsi l'équivalence synthétique et pleinement unifiée de la différenciation propre à un être. Nous avons ici,par rapport à l'algorithme reproduction, l'analogue de la quantité complexe de la forme $x+y\sqrt{-1}$, qui donne l'équivalence synthétique de l'hétérogénéité dans la sommation. Le carré de l'hypoténuse répond géométriquement à cette synthèse de la sommation,qui est le pivot des fonctions trigonométriques. Le côté du carré équivalent à un rectangle correspond , d'une manière générale, à l'équivalence de la reproduction exprimé par la moyenne géométrique ; mais alors les deux facteurs sont préalablement distincts et combinés ensuite : c'est une sorte d'accouplement.

Au contraire, le pentagone exprime l'être qui s'épure en tirant de lui-même un élément du même ordre que lui, non plus en réalisant,de concert avec un autre individu,un produit moyen, mais produisant un équilibre centré où son tout radical sera la charpente intérieure de cette réalisation équilibrée dont il formera son enceinte. Ceci nous découvre combien était judicieux le symbole cabalistique de l'étoile à 5 branches exprimant l'essence de l'homme, c'est-à-dire de cet être qui, dans l'univers,possède en son propre fond l'étincelle du Verbe divin, qu'il doit faire rayonner pour rectifier l'élément mixte dont son essence actuelle est altérée. On voit en même temps que la relation du côté du pentagone convexe avec le rayon inscrit et le rayon circonscrit réalise un triangle isocèle ayant pour base 4, pour côté latéral 5, et pour médiane 3 (à 1/20 près). C'est le fameux triangle égyptien.

Le triangle équilatéral, l'hexagone et l'étoile à 6 branches ou Sceau de Salomon, correspondent aux solutions imaginaires des moyennes raisons. Nous verrons bientôt comment ces solutions représentent une autre modalité de ce même problème de l'autonomie de l'être individuel.

***

L'analogie manifestée par les deux formes de l'équation du partage en moyenne et extrême raison n'est pas complète. La forme à racines imaginaires $x^2 + x + 1 = 0$ résulte de la divison de $(x^3 - 1)$ par $(x - 1)$ et donne les deux racines cubiques imaginaires de l'unité. La forme à racines réelles $x^2 + x - 1 = 0$ est la transformée en $z + \frac{1}{z}$ de l'équation $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$ qui résulte de la division de $(z^5 - 1)$ par $(z - 1)$, et qui donne les quatre racines imaginaires 5e de l'unité. Les racines de l'équation $x^2 + x - 1 = 0$ sont égales au double de la partie réelle (cosinus) de l'une de ces racines.

Voici ces racines :

$$\frac{1}{4}\left[(\sqrt{5} - 1) \pm \sqrt{-1}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}\right] = \cos 72^\circ \pm \sin 72^\circ$$

$$\frac{1}{4}\left[(\sqrt{5} + 1) \pm \sqrt{-1}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}\right] = \cos 36^\circ \pm \sin 36^\circ$$

Or les radicaux peuvent s'écrire sous les formes :

$$\pm\sqrt{-1}\sqrt{2\,(5 + \sqrt{5})}$$

$$\pm\sqrt{-1}\sqrt{2\,(5 - \sqrt{5})}$$

On voit donc le lien différent que présente l'équation à solutions imaginaires et l'équation à solutions

réelles. La première donne les racines cubiques imaginaires tout entières. La seconde ne donne que le double de la partie réelle des racines 5e ; et le dodécaèdre peut être construit, soit par la partie réelle seule (voie de la moyenne raison et des décagones), soit par la partie imaginaire seule (voie des pentagones), qui se rattache indirectement aux moyennes raisons.

Cette voie unique pour l'icosaèdre, double pour le dodécaèdre, répond à la différence de structure du triangle, dont le côté se confond avec la diagonale, et du pentagone, qui peut être construit comme convexe ou comme étoilé.

La corrélation parfaite qui se rencontre par rapport à la moyenne raison dans la genèse des sommets de l'icosaèdre et du dodécaèdre ne provient donc pas d'une identité de loi. C'est plutôt un point de concours de deux lois qui sortent, il est vrai, d'un principe commun, mais qui en représentent, dès l'origine, des conditions qualitatives très différentes. Une corrélation de ce genre s'est rencontrée, en 2e dimension, entre les séries hexaédrique et octaédrique, toutes les deux représentées par 4 sommets formant un carré. Mais l'un de ces carrés est engendré par 2^2 et par déplacement parallèle d'une ligne, l'autre par 2×2 et par intersection de 2 axes perpendiculaires.

La différence d'origine entre l'icosaèdre et de dodécaèdre se décèlera de nouveau dans la 4e dimension.

En effet, pour obtenir les nombres 120 et 600 relatifs aux sommets du 600-édroïde, et du 120-édroïde deux voies sont ouvertes : 1° prendre pour multiplicande

le nombre des sommets de l'icosaèdre et de l'octaèdre. On a alors :

$(3^2 + 3)(3^2 + 1) = 12 \times 10 = 120$

$(5^2 - 5)(5^2 + 5) = 20 \times 30 = 600$;

2° Prendre pour multiplicateur les facteurs $(3^2 + 1)$ et $(5^2 - 1)$ qui semble découler de la même loi de formation que $(3 + 1)$ et $(5 - 1)$. Et alors les multiplicandes seront pour le 120-édroïde, le nombre des sommets de l'icosaèdre, soit: $3 \times 4 = 12$; mais pour le 600-édroïde, au lieu de $5 \times 4 = 20$, on prendra $5^2 = 25$. On a alors les formules

$(3^2 + 3)(3^2 + 1) = 12 \times 10 = 120.$

$5^2 (5 - 1) = 25 \times 24 = 600.$

Dans les deux cas,la parfaite symétrie de formation manifestée dans la formation des sommets de l'icosaèdre et du dodécaèdre est altérée

***

La différence entre les solutions réelles et les solutions imaginaires de la moyenne raison,dans leur relation avec les racines imaginaires de l'unité, se manifeste encore sous une autre forme. Les solutions de l'équation $x^2 + x + 1 = 0$ sont les deux racines cubiques imaginaires de l'unité. Les solutions de l'équation $x^2 + x - 1 = 0$ sont chacune égales à la somme d'une des racines imaginaires 5e avec son inverse. Voilà des quantités composées qui ne sont pas formées par la réunion d'un élément réel avec un élément imaginaire ni basé sur le contraste angulaire, mais qui sont constituées par la réunion d'une quantité plus grande que l'unité avec une quantité plus petite qu'elle. Cette opposition est celle du

dedans au dehors. Elle répond encore à l'inversion géométrique. Nous ne pouvons incidemment aborder l'étude de cette relation si importante ; observons cependant qu'elle a pour résultat fréquent de transformer des figures fermées en figures ouvertes, et réciproquement. Et il est assez remarquable de trouver son apparition à la limite des formes régulières (le pentagone étant le polygone le plus élevé qui les permette).

Prendre l'inverse d'une quantité, par exemple 1/3 au lieu de 3, c'est substituer la division d'un tout en plusieurs partie à la construction d'un ensemble par l'unité. Nous verrons plus tard comment cette opération métaphysique est le lieu des notions d'infini et de continuité. Signalons seulement qu'elle remplace l'expansion par l'élaboration divisionnelle et qu'elle substitue comme limite la continuité à l'infini. Les quantités complexes de la forme $z + \frac{1}{z}$ expriment donc l'équilibre entre une distribution interne et une construction externe : elles créent l'opposition du dedans au dehors par rapport à une enceinte. Et, chose à noter, ce principe, dont on voit l'application immédiate à la vie individualisée, apparaît avec le quinaire, nombre caractéristique de cette modalité d'être. Car l'individu vivant doit sa conservation à l'équilibre sans cesse maintenu entre le monde intérieur et le monde extérieur, au moyen de cette zone intermédiaire qui constitue son corps et son affectivité. Et le problème de la moyenne raison ne peut se résoudre en formes individuelles (solutions réelles) que par cette polarisation d'*intus ad extra*, et non plus, comme dans l'universel (solutions imaginaires), par les contrastes successifs caractérisés par les angles de 60 et de 120°.

Solutions réelles

Les solutions réelles de la moyenne et extrême raison donnent 2 points situés, l'un sur la ligne partagée, l'autre sur son prolongement. Prendre le signe +, c'est chercher la moyenne raison par défaut et trouver en même temps par surcroît la solution par excès ; prendre le signe —, c'est suivre le but contraire. Ainsi, dans les deux cas, la fin proposée est unilatérale, mais la résolution du problème apporte l'autre solution comme contre-partie inévitable. (Pareille remarque s'appliquerait aux solutions imaginaires.)

Entre ses deux moyennes, la quantité à partager marque l'unité. Géométriquement et en fonction du principe centralisateur, les deux solutions sont les côtés du décagone étoilé et du décagone convexe par rapport au rayon du cercle circonscrit à ces deux polygones. Mais on peut aussi considérer le rapport de l'une ou l'autre des solutions avec l'unité en question. L'équation $x^2 \pm ax - a^2 = o$ étant symétrique, on peut prendre à volonté pour unité ou pour moyennes x ou a. Il en résulte que, si l'unes des racines x_1 est la moyenne par excès de a, la racine correspondante a_1 sera la moyenne par défaut de x. Cette réciprocité répond à la construction géométrique des pentagones convexe et étoilé inscrits dans le même cercle; car, si l'on prend pour unité le côté du pentagone convexe, le côté du pentagone étoilé (qui est la diagonale du pentagone convexe) donne la moyenne raison par excès ; si l'on prend le côté du pentagone étoilé pour unité, le côté du pentagone convexe donne

la moyenne raison par défaut. Les côtés des décagones convexe et étoilé répondent aux deux moyennes en fonction d'une unité intermédiaire qui est le rayon du cercle. Les pentagones donnent une forme pour ainsi dire contractée, binaire, réciproque de l'algorithme ; les décagones une forme développée ternaire explicite, synthétique.

***

Le pentagone représente l'expression optima des moyennes raisons sous forme réciproque dans la 2e dimension. En effet, cette figure donne, par toutes ses lignes et toutes les divisions qui résultent de leurs intersections, les rapports de cet algorithme, Les diagonales (côtés du pentagone étoilé) sont la moyenne raison par excès des côtés ; ceux-ci la moyenne raison par défaut des diagonales.

Le pentagone convexe se décompose en 3 triangles isocèles : 2 externes ayant pour base une diagonale, et pour côtés latéraux les côtés du pentagone ; un médian ayant pour base un côté du pentagone et pour côtés latéraux, deux diagonales. Les diagonales s'intersectent de manière que le plus grand segment est égal au côté du pentagone, et le plus petit à la moyenne raison par défaut du côté. On obtiendrait, par contre, la moyenne raison par excès de la diagonale, par la base du triangle formé en prolongeant 2 côtés du pentagone convexe issus d'un même sommet jusqu'à leur intersection avec le prolongement du côté opposé à ce sommet. Cette construction répétée sur les 5 côtés donne un nouveau pentagone étoilé orienté en sens inverse des précédents. De même, l'intersection des

diagonales forme à l'intérieur du pentagone primitif un petit pentagone convexe orienté en sens inverse du primitif, donc comme le grand pentagone étoilé.

***

Le partage en moyenne et extrême raison introduit un nouveau genre de contraste. M. Ch. Henry a établi les lois des deux contrastes les plus fondamentaux, l'un successif, marqué par les divisions ternaires, l'autre simultané, marqué par les divisions binaires et quaternaires. Ces deux fonctions essentielles correspondent aux schémas les plus généraux du temps et de l'espace. Le partage en moyenne et extrême raison répond au contraste entre le dedans et le dehors, entre l'expansion et la concentration. Ce contraste est moins objectif que les précédents et correspond au schéma le plus élémentaire et le plus fondamental de la vie, la vibration. La vibration exprime en effet deux états extrêmes, l'un expansif, l'autre contracté, et un état neutre intermédiaire marquant le degré d'inertie. Ce cas répond au schéma décagonal. Mais il existe un grand nombre de cas où la fonction vibratoire devient pour ainsi dire hémiédrique, l'état d'inertie formant une limite et l'oscillation ne pouvant se produire que dans l'un des deux sens, soit en expansion, soit en contraction. (Cela répond au schéma pentagonal.) Les cristaux lévogyres et dextrogyres, propres surtout aux substances organiques, sont pour ainsi dire la préparation à cette hémiédrie de l'activité ; ils en donnent une image passive par rapport au quaternaire spatial. Mais l'hémiédrie de l'activité se manifeste au premier chef dans l'oppo-

sition des tissus élastiques aux tissus musculaires. Dans les tissus élastiques, l'état de repos s'oppose à une tension expansive ressemblant à une traction ; dans les tissus musculaires, au contraire, l'état de repos est voisin de la distension; l'état d'activité est une contraction ressemblant à une compression. Et, chose remarquable, les animaux supérieurs, chez qui l'individualité absorbante est très développée, possèdent la contraction musculaire et la flexion des appendices à un degré beaucoup plus intense en général que la distension, l'élasticité et l'extension des appendices.

***

Partant de ces données, quelle sera la représentation géométrique normale du partage en moyenne et extrême raison ? Les solutions réelles sont portées sur la ligne considérée; il semble donc qu'une seule dimension suffit à l'expression géométrique de cet algorithme. Mais la construction des moyennes géométriques ne peut s'accomplir par les relations de lignes sans pénétrer dans la 2e dimension : la forme des racines de toute équation du 2e degré a pour corrélation géométrique une relation angulaire. Ainsi, si l'on veut trouver une donnée géométrique exprimant la nature de cette relation, et non pas seulement la notation métrique d'un rapport purement numérique, il faut pénétrer dans la 2e dimension.

L'individu linéaire ne peut découvrir cet optimum sans sortir de sa propre direction, sans pouvoir se placer en dehors de lui-même afin de prendre conscience de sa propre grandeur. Cette nécessité se rencontrait déjà

à propos du contraste successif. L'idée de succession en effet paraît représentable avec une seule dimension ; mais l'idée de contraste implique comparaison et synthèse, donc un milieu où les éléments contrastants coexistent en simultanéité, milieu qui est la mémoire. Et c'est pourquoi M. Ch. Henry a recouru au cycle pour représenter les contrastes successifs.

Supposons donc que la longueur d'un segment pris pour unité exprime le terme de développement propre à une espèce d'individus. Et, pour fixer les idées, supposons que la forme linéaire soit le caractère essentiel de cette espèce d'individus vivants. Cet individu linéaire n'a d'abord pour évoluer que l'espace à une dimension dont il occupe une partie. L'arrêt de son développement marque le point où la force expansive inhérente à l'individu est arrêtée par la résistance extérieure, résistance qui ne peut ici se concevoir que dans la direction invariable de la ligne et dans le sens négatif. La tendance de tout vivant étant en général un progrès indéfini, cet arrêt ne correspond pas en général à une finalité atteinte, mais à un obstacle qui empêche son accomplissement.

L'arrêt, en développant la conscience, transforme l'appétition indéfinie en tendance définie ; une fin déterminée et limitée apparaît comme devant concilier l'impossibilité d'avancer avec le besoin de se développer. De là la formation d'un idéal plus ou moins conscient auquel répondent les moyennes raisons. La solution par excès est un optimum expansif par refoulement des obstacles ; la solution par défaut est un optimum restrictif qui réfléchit la force et supprime la contrainte en cédant à l'obstacle et en opérant une condensation,

grâce à laquelle l'individu, moins étendu mais plus résistant, bravera sans efforts les assauts du milieu. Cette dernière solution de la lutte pour l'existence est des plus remarquables et correspond à un précepte bien connu de l'ésotérisme : triompher en cédant. C'est la marche en arrière pour occuper une forte position.

La double solution donnée par l'algorithme de la moyenne raison répond admirablement aux deux tendances polaires dont l'union harmonieuse constitue la vie heureuse, concentration et expansion. M. Griveau a énoncé une loi esthétique qui correspond parfaitement à cette polarisation. Il a montré que la beauté ne réside pas dans le point neutre d'équilibre ; ce point ne peut être qu'un lieu de passage indifférent, ou, s'il est accentué, un point de rupture (1). Les points esthétiques sont situés de part et d'autre de ce centre, l'un réalisant un optimum d'énergie ou de condensation, l'autre un optimum d'inertie ou de détente, l'un de beauté mâle, l'autre de beauté femelle. Cette loi esthétique n'est que l'application des principes métaphysiques universels.

***

Les solutions réelles de la moyenne raison peuvent se répartir sur une droit indéfinie de plusieurs manières. Ces 2 solutions réelles se dédoublent en 4, de valeurs égales 2 à 2 et de sens contraire si l'on prend le 2e terme

---

(1) Ce principe extrêmement juste est la condamnation de nombreux partis décoratifs des styles Louis XIV, Louis XV et Louis XVI.

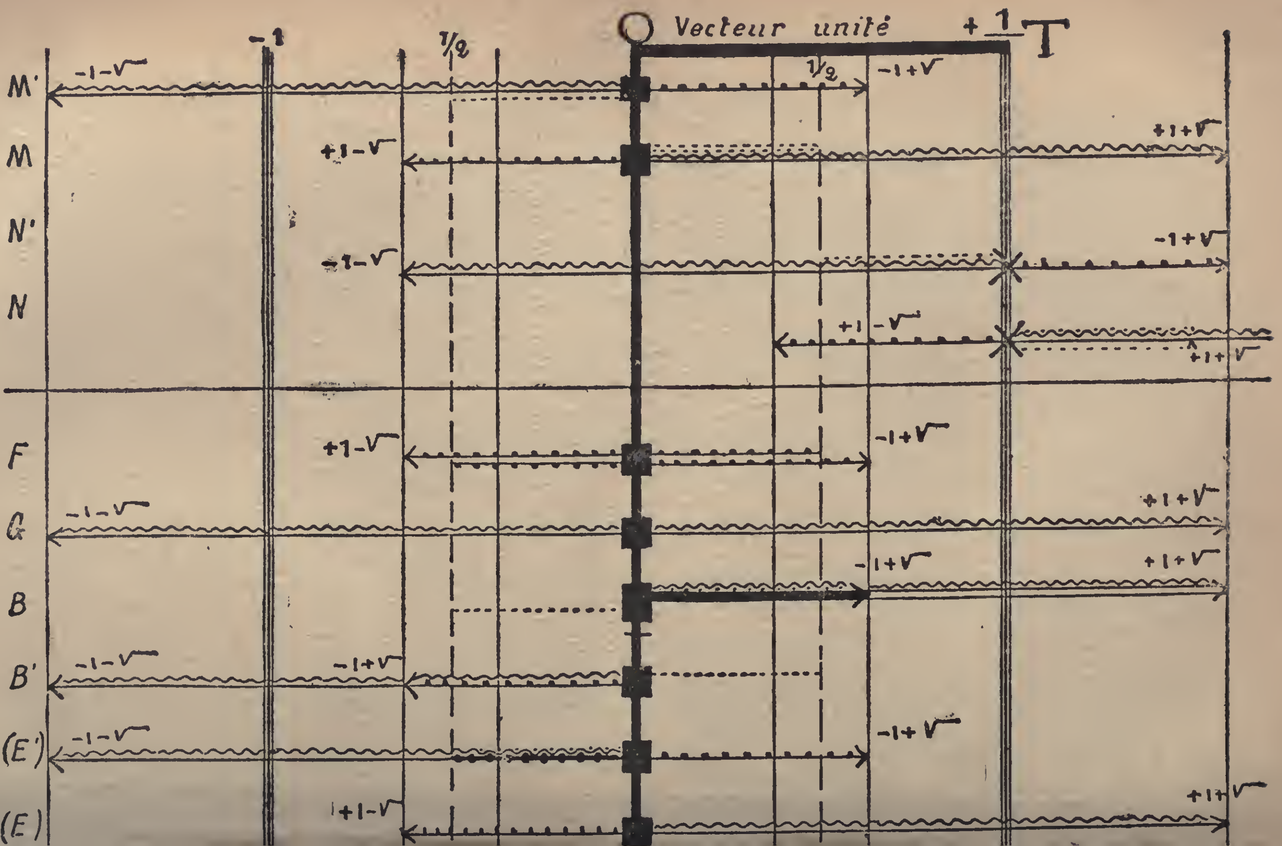
de l'équation tantôt avec le signe +, tantôt avec le signe —.

On peut ainsi indiquer une oscillation soit autour de l'origine soit autour du point extrême, symétrique ou asymétrique, suivant que l'on allie les deux solutions par excès (ou par défaut ensemble), ou qu'on réunit une solution par excès à une solution par défaut. On peut encore porter l'une des solutions à partir de l'origine, à partir de l'extrémité, soit toutes deux allant l'une au devant de l'autre et s'entrelaçant, soit toutes deux se tournant le dos et laissant le segment vide. On peut encore les porter toutes deux dans le même sens, soit la plus petite en arrière courant après la plus grande, soit la plus grande en arrière débordant la plus petite, soit toutes deux issues du même point dans la même direction. Toutes ces combinaisons schématisent les diverses attitudes de l'individu vis-à-vis des résistances extérieures, et ses systèmes de réaction. (*Voir le tableau.*)

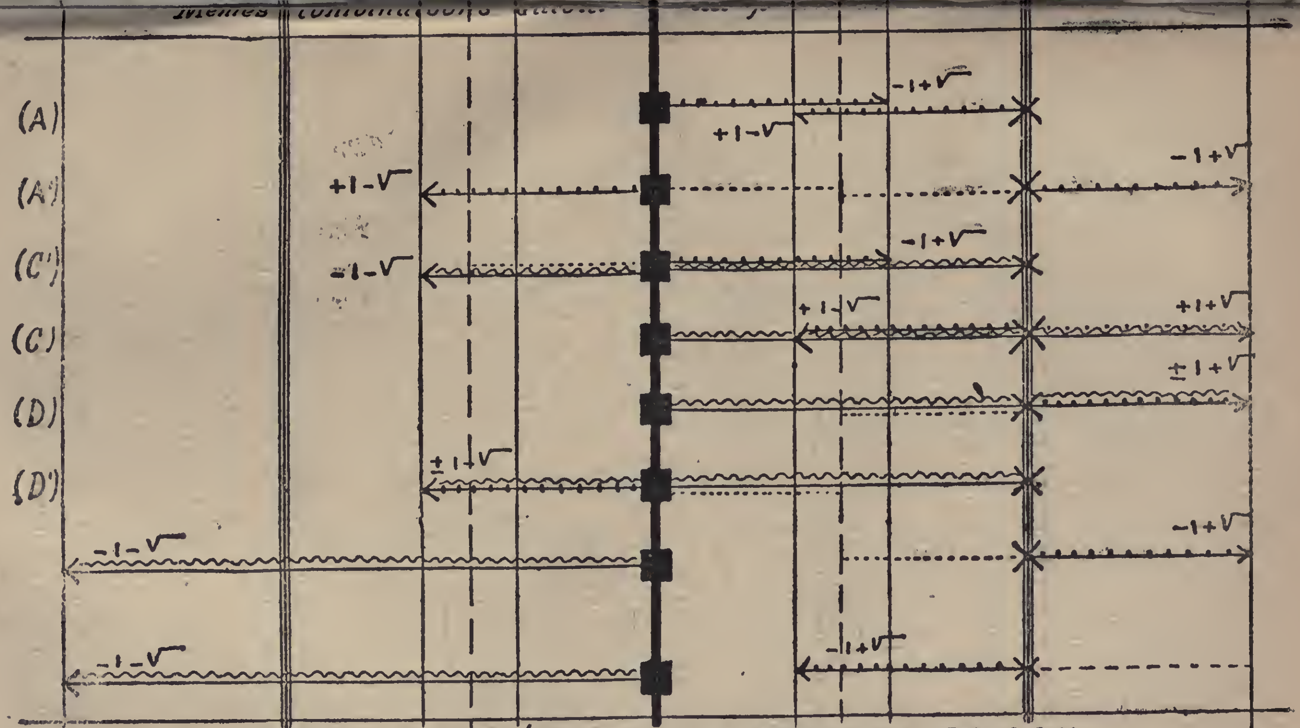
Nous ne retiendrons ici que les combinaisons qui se rapportent principalement à la tendance centralisatrice (puisqu'il s'agit d'obtenir les formes régulières), laissant de côté les combinaisons dispersives ou exclusivement extensives.

La combinaison (A) où les deux solutions par défaut sont, l'une portée de l'origine vers l'extrémité, et l'autre de l'extrémité vers l'origne, est symétrique autour du milieu du segment, et conduira directement à la construction du pentagone.

La combinaison (B) des deux solutions à radical positif, l'une par excès, l'autre par défaut, portées toutes deux depuis l'origine dans le sens positif, semble exprimer l'individu prenant son point d'appui dans ce



Vecteur unité
+1
T
-1
1/2
1/2
M'
M
N'
N
F
G
B
B'
(E')
(E)
-1-V
-1+V
+1-V
+1+V



SOLUTIONS RÉELLES DE LA MOYENNE RAISON

Les ——— ...... sont les moyennes par défaut | les symboles abrégés $\pm 1 \pm \sqrt{}$

Les ~~~~~~ par excès | répondent à .. $\pm \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{5}{4}}$

qu'il a de plus originaire, de plus éloigné de l'obstacle et projetant deux échelons l'un d'avant-garde, l'autre de soutien. Elle donnera le pentagone convexe ayant pour côté la moyenne par excès, et empiétant sur le domaine extérieur au cercle ayant pour rayon l'unité ou la longueur du segment.

Dans la combinaison C), on prend les deux solutions où le 2e terme de l'équation est négatif (ce qui donne $+1$) ; la solution par excès est portée de l'origine, la solution par défaut de l'extrémité. Elles se croisent en route, et donnent comme un refoulement partant de l'extrémité, et égal à la moyenne par excès. Ce type asymétrique donnera les décagones convexe et étoilé, et aboutira au dodécaèdre par une voie différente de celle que donnera la réunion de (A) et de (B).

La combinaison (C') donne un décagone étoilé. Elle est opposée à la précédente en ce qu'elle prend les 2 solutions répondant au 2e terme de l'équation pris positivement (ce qui donne -1), mais analogue, en ce qu'elle porte la moyenne par excès à partir de l'origine et celle par défaut, à partir de l'extrémité, Cette combinaison montre un double courant dans la partie moyenne du développement.

Remarquons encore la combinaison symétrique (F,) dont le tracé exige symétriquement un aller (pointillé) jusqu'à $\pm \frac{1}{2}$ et un retour jusqu'à $\frac{\pm 1 \mp \sqrt{5}}{2}$ et répond au signe zodiacal du Cancer ♋.

Et aussi la combinaison symétrique (G) $\frac{\pm 1 \pm \sqrt{5}}{2}$ et dont le tracé donne le schéma du globe ailé —o—. La première de ces combinaisons exprime la concen-

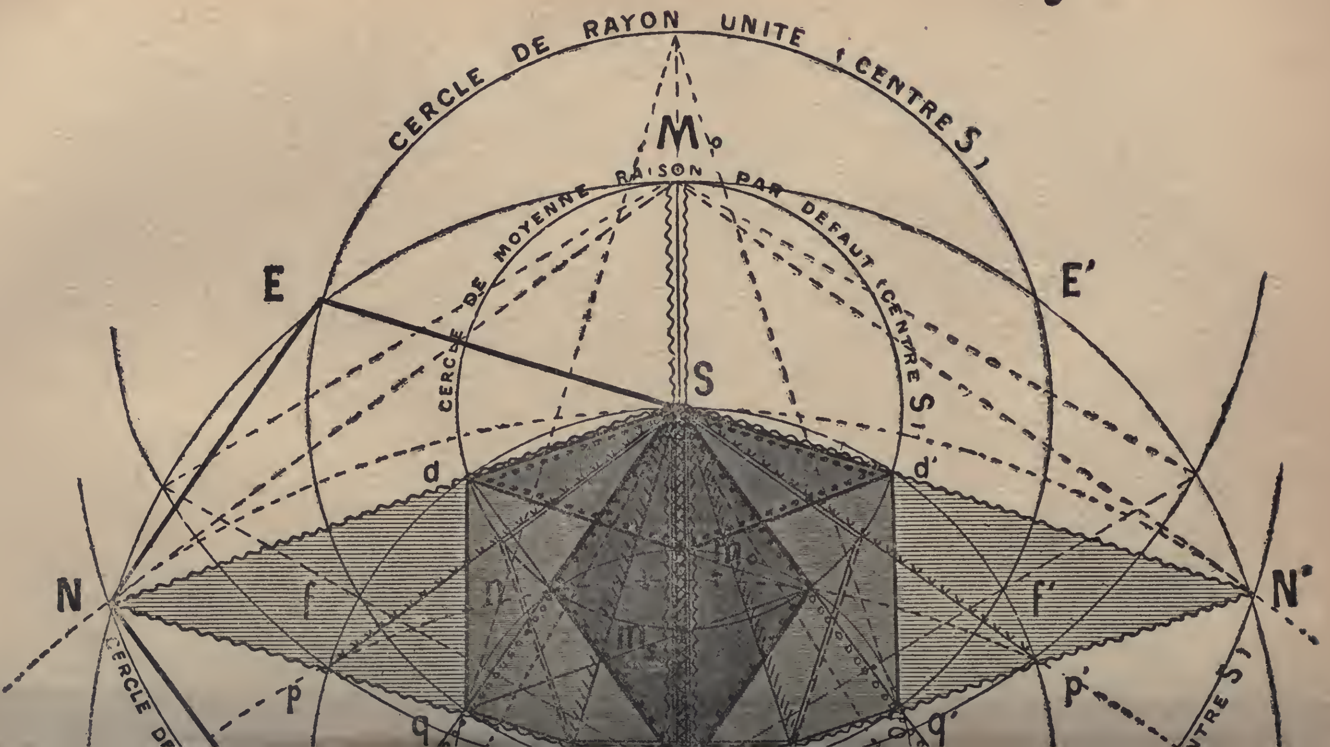
tration, l'autre l'expansion, toutes deux statiques autour de l'origine.

La solution A' indique la rupture de l'individu.

Construction géométrique de la suite dodécaédrique par les moyennes raisons

Nous avons supposé jusqu'ici l'individu enfermé dans la première dimension. Il y a trouvé deux situations optima. Néanmoins, le développement qui exprime pour lui l'unité n'en reste pas moins un état neutre vers lequel il est amené à revenir, car les 2 points des moyennes représentent : l'un, un état de condensation, l'autre, un état d'expansion. Isolés, ces deux états mettent simplement la vie dans des situations favorables pour se maintenir dans le milieu donné, mais ne satisfont pas à la finalité de la vie, qui est le progrès. L'unité est l'élément neutre unissant les éléments être et savoir représentés par les deux moyennes : l'union de ces trois est nécessaire pour constituer une réalité. En fonction de la vie, ils représentent la vibration. Mais c'est la réalité élémentaire, et, conformément à la loi de création telle que l'explique Wronski, ces trois éléments tendent à se développer chacun en réalité indépendante et à coexister tous les trois. Telles sont les conditions auxquelles répondent l'accès d'un nouveau milieu où pourront se développer les éléments universels et transitifs. Si donc le plan s'ouvre au développement linéaire des moyennes, elles s'y distribueront en faisceaux autour du point origine et du point terminal, et tendront à se répéter indéfiniment pour s'épanouir

Fig. 1


CERCLE DE RAYON UNITE (CENTRE S)
CERCLE DE MOYENNE RAISON PAR DEFAUT (CENTRE S)
M
S
E
E'
N
N'
d
d'
f
f'
n
m
p
p'
q
q'

MOYENNE RAISON
D
T
CERCLE DE LA MOYENNE RAISON PAR DÉFAUT (CE...
SOLUTIONS IMAGINAIRES
P
CERCLE DE RAYON UNITÉ (CENTRE ...)
P'
T'
D'
PAR EXCÈS
(CENTRE O)
M
S
CERCLE DE LA MOYENNE RAISON PAR EXCÈS

$\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ -1 $\frac{+1-\sqrt{5}}{2}$ 0 $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ $+1$ $\frac{+1+\sqrt{5}}{2}$

en éléments universels; l'optimum de ces faisceaux consisterait en réseau ne laissant pas d'interstices, si cela était possible. Mais en même temps les 2 pôles : être et savoir, expansion et concentration tendront, à se convertir l'un dans l'autre; les 2 moyennes tendront à s'allier, les formations par défaut ayant pour base un moyenne par excès et réciproquement. De là, des figures fermées exprimant les éléments transitifs dont l'optimum sera réalisé par des pentagones réguliers.

L'oscillation d'aller et retour, caractéristique de la vibration linéaire, est ici remplacée par la vibration plus complexe d'expansion périphérique et de contraction, répondant aux deux forces fondamentales de l'univers. L'individu arrêté suivant sa direction primitive voit s'ouvrir un champ latéral.



Ici se présente un premier mode d'opération. Prendre son point d'appui sur l'origine O et l'extrémité S qui deviennent tous deux les supports de même nature, et de ces 2 points décrire 2 cycles de rayon unité. Ces cycles auront pour axe radical (ou corde commune) la perpendiculaire au milieu du segment O S (fig. 1). Des mêmes points, l'individu tracera 2 autres cycles ayant pour rayons, l'un la moyenne par excès, l'autre la moyenne par défaut. Ces cercles se couperont sur le même axe médian que les deux précédents. Les rayons menés aux points d'intersections de ces 3 couples de cercles donneront de chaque côté de l'axe, 3 triangles isocèles. Tous trois auront pour base commune le segment unité : les deux triangles extrêmes auront leurs côtés laté-

raux formés par les moyennes raisons par excès et par défaut : le triangle intermédiaire est équilatéral; ses côtés latéraux donnent les solutions imaginaires.

Le côté latéral externe S N, triangle des moyennes par excès, rencontre en un seul et même point *d* le côté latéral interne O N du petit triangle prolongé, le cercle du rayon unité ayant O pour centre et le cercle, de la moyenne par défaut ayant S pour centre. Le point *q* remplit les conditions corrélatives pour le côté latéral interne O N.

La distance *d q* qui sépare ces 2 points est égale à la moyenne raison par défaut. Et ainsi, en prenant dans l'une des régions du plan formées par l'axe O S le petit triangle O m' S, et dans l'autre, le trapèze formé par le tracé symétrique de O *d q* S, on a un pentagone convexe ayant pour diagonale (côté du pentagone étoilé) ou axe transverse le segment origine et pour côté, la moyenne par défaut de cet axe.

De même,en prolongeant les côtés du triangle O m' S jusqu'aux intersections D et E avec les cercles de rayons unité et en joignant ces points à N, on a un grand pentagone convexe ayant pour côté la diagonale du pentagone précédemment construit. Son côté représente donc l'unité; sa diagonale (côté du pentagone étoilé) donne la moyenne par excès.

D'autre part, l'intersection du côté S N du triangle des moyennes par excès, avec le cercle de rayon unité et le centre O, donne le segment *S d*, côté latéral du trapèze qui fait partie du pentagone ayant pour côté la moyenne par défaut et qui, par conséquent, constitue le côté du décagone convexe inscrit dans le cercle de rayon unité et de centre O. Pareillement,

S D,(prolongement du côté du triangle des moyennes par défaut jusqu'au cercle de rayon unité et de centre O), est le côté du décagone étoilé inscrit dans ce même cercle.

L'individu,de segment orienté suivant O S,est devenu axe transverse également appuyé sur O et sur S,qui ont perdu leur différence de nature. Mais la finalité essentielle au vivant et qui entraîne toujours une direction doit maintenant différencier les deux régions du plan séparées par le segment primitif. Il y a symétrie suivant cet axe transverse mais il y aura dissymétrie dans la direction perpendiculaire. Cette dissymétrie et l'orientation vers la région supérieure du plan, par exemple, peut se manifester suivant le mode de condensation ou suivant le mode d'expansion.

Dans le mode de condensation, il y aura formation du pentagone ayant pour côté la moyenne par défaut et placé de façon à réaliser dans la région supérieure le triangle isocèle O N S, et dans l'autre, le trapèze O q' d' S. Ainsi, d'un côté une pointe, de l'autre appui contre les 2 cercles de rayon unité, schéma bien typique de la progression en avant, qui évoque le 2e temps de la natation. Si, au lieu du pentagone convexe, on prend le pentagone étoilé qui a les mêmes sommets, on a d'une manière encore plus typique le schéma du vertébré, avec sa tête et ses quatre appendices, dans le 3e temps de la natation.

Dans le mode d'expansion, l'individu construit ce pentagone O S D E N dont le côté arrière est formé par le segment primitif. Ce segment n'est plus axe transverse, mais base

***

L'accès de l'individu dans la 2e dimension peut se produire suivant un autre mode. C'est celui où l'orientation O S persiste, et où la translation dans ce sens, étant empêchée, va se transformer en parcours cyclique autour du point origine O. Dans ce cas, l'individu distribue ses moyennes en suivant le cercle de rayon unité et de centre O ; de là, des points d'arrêts découlant de l'algorithme des moyennes raisons. Ces moyennes se porteront en cordes issus de S ; elles représenteront la réflexion sur le cycle de l'impulsion primitive dans la direction O S. Il en résultera les deux décagones inscrits. Il y aura donc 10 points d'arrêts sur le cycle, et le pentagone construit m' O S q' d' prendra 10 positions successives, chaque position déplaçant l'angle au centre de 1/3, chaque diagonale issue du centre venant prendre la place de sa voisine. Il en résulte que le cycle complet sera couvert par 3 pentagones distincts et juxtaposés plus 1/3 d'angle au centre, ce qui donne, (en prenant pour unité d'angle celui qui correspond à un côté du décagone convexe), la formule $(3^2 + 1)$.

Ce mouvement en cycle entraîne donc un chevauchement ou bien un parcours incomplet. Aussi le mouvement cyclique tend à substituer aux deux pentagones ayant le segment primitif soit pour côté, soit pour diagonale, les pentagones inscrits dans les cercles unité et dans les cercles de moyenne raison, processus que nous examinerons plus loin.

D'autre part, le développement de la moyenne raison autour du segment unité par une série indéfinie de pentagones contigus est impossible. On peut grouper 5 pentagones autour du pentagone primitif, mais ils n'auront pas entre eux d'arêtes communes. Un réseau

de pentagones laissera donc des interstices. Le groupement des 5 pentagones autour d'un pentagone central marque donc la limite du réseau continu pentagonal.

Le groupement des 2 pentagones O D N E S et O N S *d' q'* s'appuie sur les 3 cycles, celui de l'unité et celui des 2 moyennes, et combine les 2 tendances à la condensation et à l'expansion.

La multiplication indéfinie des pentagones dans le plan est impossible : elle entraîne des chevauchements ou des lacunes. Porosité ou replis, telle est bien la loi qui s'impose au développement animal.

***

L'entrée en jeu de la 3e dimension donnera lieu également à un développement par concentration et à un développement par expansion suivant les mêmes tendances Dans le premier cas, le pentagone qui sert de point de départ représentera la section plane maximum. Le pentagone projettera ses moyennes par défaut, d'un côté, en pyramides, de l'autre côté, en forme prismatique, enfin, ses unités en diagonales. Nous verrons plus loin cette construction, qui donne l'icosaèdre.

Dans le second cas, appuyant sur le plan de base le pentagone ayant l'unité pour diagonale et sa moyenne par défaut pour côté, projetons dans la 3e dimension les 5 pentagones qui entourent le pentagone central, et de chaque sommet les moyennes par excès de l'unité, de manière à élever comme précédemment des triangles isocèles de ces deux types surchaque arête. Nous aurons le dodécaèdre tout entier. La sphère circonscrite sera déterminée *a posteriori* par cette construction. L'unité

n'est pas tracée; elle est donnée par les diagonales des faces. Ce sont ses moyennes par excès et par défaut qui constituent : les premières, les arêtes du dodécaèdre étoilé, les secondes, celles du dodécaèdre convexe.

Cette formation, dans laquelle tous les sommets sont reliés entre eux par les relations de moyenne raison, marque l'optimum à 3 dimensions de cet algorithme en fonction d'un centre. Il y a cependant encore deux lignes importantes de la figure qui, déterminées indirectement par les précédentes, ne répondent pas aux moyennes raisons. Ce sont les axes (diamètres de la sphère circonscrite) et les diagonales tropiques. Les diagonales tropiques sont celles qui relient les extrémités d'une ligne brisée de 3 arêtes ; les diagonales arctiques (arêtes du dodécaèdre étoilé) sont celles qui relient les extrémités d'une ligne brisée à 4 segments (les angles changeant chaque fois de sens). Or la diagonale polaire s'inscrit dans la demi-sphère avec l'arête, et de même la diagonale polaire avec la diagonale de face. Le diamètre de la sphère est donc l'hypoténuse de deux triangles rectangles donnant les relations suivantes :

1° $\overline{\text{Diamètre}}^2 = \overline{\text{arête}}^2 + \overline{\text{diagonale polaire}}^2$,

$$= \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{1+5}{2} = 3$$

d'où le diamètre $= \sqrt{3}$ la diagonale des faces étant prise pour unité.

2° $\overline{\text{Diagonale tropique}}^2 = \overline{\text{diamètre}}^2 - \overline{\text{diagonale de face (unité)}}^2$

$$= \left(\frac{1+5}{2}\right) - 1^2 = 2$$

et la diagonale tropique $= \sqrt{2}$, la diagonale des faces étant prise pour unité.

Ces valeurs, extrêmement simples, comparées aux valeurs compliquées qu'on obtient quand on veut exprimer l'arête en fonction du rayon de la sphère circonscrite savoir $\left(\frac{\sqrt{15 - \sqrt{3}}}{5}\right)$ ou réciproquement celle du rayon circonscrit en fonction de l'arête, savoir $\left(\frac{\sqrt{15 + \sqrt{3}}}{4}\right)$ et d'autres encore, montrent que véritable unité genétique du dodécaèdre est bien la diagonale de la face.

***

Nous avons déterminé le pentagone par 2 lignes étant dans la relation de l'unité à l'une de ses moyennes raisons.

Une 3e ligne a été suggérée par cette relation : l'autre moyenne raison. Avec ces 3 lignes, l'unité et ses deux moyennes, nous avons déterminé le dodécaèdre. Et cette détermination fait apparaître 2 nouvelles lignes qui introduisent dans ces polyèdres les relations du triangle équilatéral et du carré inscrits dans le cercle dont l'unité primitive était le rayon. Ces 5 lignes sont les seules distinctes qu'on puisse mener entre les sommets, et il est remarquable que la réalisation de l'optimum de la moyenne raison dans la 3e dimension rattache ce développement aux éléments fondamentaux des contrastes maximum successif et simultané, et introduise, dans le dodécaèdre le principe des deux autres seules figures planes qui interviennent dans les polyèdres.

Cette intégration dans l'autonomie individuelle des racines des contrastes simultanés et successifs est suggestive au point de vue métaphysique. Elle montre, dans le développement de l'individu qui s'épure, se perfectionne et s'élève à travers les plans successifs d'existence, les principes fondamentaux de l'ordre cosmique, ceux du temps et de l'espace se fixant en lui. Ici, la fonction la plus importante appartient au contraste successif; car c'est le diamètre de la sphère qui l'exprime, et ainsi l'ordre temporel s'installe comme pivot de l'organisation individuelle. La relation d'espace, au contraire, croise les directions des arêtes pour multiplier leurs relations, mais les diagonales tropiques qui la représentent, apparaissent comme des figures secondaires. Elles parcourent les sommets de 3 en 3 à la manière du décagone gauche en serpentant, à l'intérieur des faces. C'est bien là le schéma de la motilité vivante dans sa forme rudimentaire. La relation d'espace apparaît donc ici comme dynamique et circulaire, celle du temps comme statique et axiale, et ainsi est mise en évidence une fonction importante de la vie : la *transmutation du temps en espace et réciproquement.*

Le dièdre du dodécaèdre a pour tangente — 2, nombre remarquable répondant au contraste minimum. Or la tangente par sa position vient buter perpendiculairement contre les plans du dièdre donnant à peu près cette figure . La limitation à l'ouverture du dièdre s'accomplit ici par une réaction perpendiculaire au rayon mobile et égale au diamètre, comme si, pour éclore au milieu à 3 dimensions, l'individu avait à lutter contre une pression normale représentée par le diamètre du cycle dans lequel il était enfermé :

ce qui transforme ce cycle en grand cercle d'une sphère. Là est peut-être le principe des angles pour nombre de formations vivantes (corolles de fleurs, polygone-enveloppe de certains profils animaux ou humains arrivés à leur complet développement).

***

Le dodécaèdre donne encore avec la sphère des relations approximatives (de 2 à 4 °/$_{\infty}$ près) :

1° Le pentagone face du dodécaèdre s'inscrit dans le cercle ayant pour rayon la moyenne raison par défaut du rayon de la sphère circonscrite au dodécaèdre; 2° la moyenne raison par excès du rayon de cette sphère est très voisine des diagonales tropiques du dodécaèdre, et aussi de l'arête du tétraèdre.

Une construction géométrique ne peut se fonder sur des égalités approximatives ; mais ces relations n'en n'ont pas moins une grande importance dans les applications physiques. Elles créent des régions très restreintes où se concentrent l'effet de plusieurs lois ; elles produisent ainsi par les voisinages des combinaisons d'objets et d'actions que les lois propres à chacun ne permettrait pas de prévoir. Les égalités approximatives ont en outre une grande importance en métaphysique ; elles semblent indiquer certaines conditions pour ainsi dire providentielles, répondant à ce que Wronski appelle le concours final d'un système et grâce auquel les éléments absolument hétérogènes se trouvent unis en vertu d'une nécessité supérieure. Il y a là un fait de l'ordre du tempérament en musique, où le cycle des tonalités ne peut se clore

que par des approximations ; et ces approximations, constituant l'enharmonie, rendent voisins et convertibles les tons genétiquement les plus éloignés.

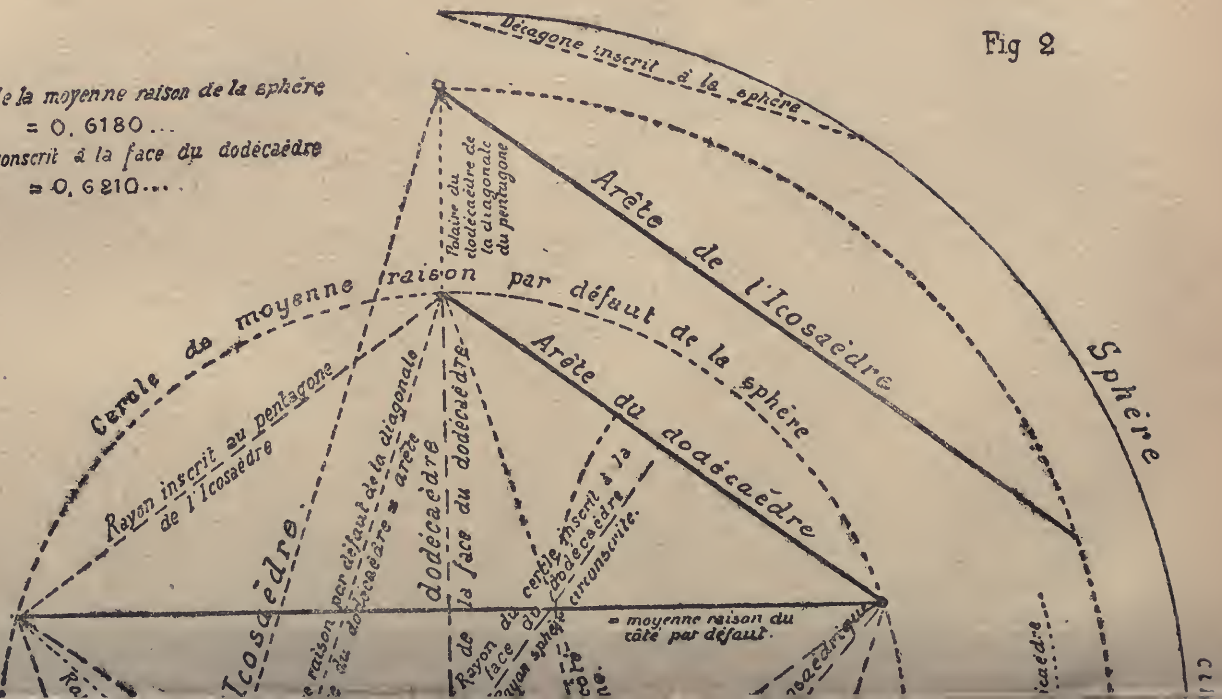
***

Les 5 espèces de lignes qui relient les sommets du dodécaèdre vont déterminer la construction du 120-édroïde. Opérant de la même manière, nous prendrons les numérateurs des deux nouvelles valeurs obtenues (diamètre $= \frac{1 + 5}{2}$ et diagonale tropique $= \frac{5 - 1}{2}$) nous aurons les deux multiplicateurs du carré de 5 nécessaires pour obtenir 600.

Nous avons eu $20 = 5 \; (\sqrt{5 - 1}) \; (\sqrt{5 + 1}) = 5 \times 4$,
Nous aurons $600 = 5^2 \, (5 + 1) \; (5 - 1) = 25 \times 24$. (1)

***

La genèse de 20 par cette formule correspondait à élever sur les 5 sommets du pentagone la construction du côté du pentagone et de sa diagonale disposés comme nous l'avons vu. Ici, nous devons supposer une figure à 3 dimensions ayant 25 sommets, par exemple, formée par le système de chaque sommet du pentagone de base avec les 5 lignes de longueurs différentes auxquelles il donne naissance, et une distribution de 24 volumes euclidiens (corrélatif du plan dans la 4e dimension) parallèles. D'autre part, la genèse de 20 pour la même formule répondait au nombre maximum de sommets de dodécaèdre contenus dans un plan passant par le centre de la sphère. Par analogie, on aurait 25 grou-


Fig 2
Rayon de la moyenne raison de la sphère
= 0, 6180...
Rayon circonscrit à la face du dodécaèdre
= 0, 6210...
Décagone inscrit à la sphère
Sphère
Arête de l'Icosaèdre
Polaire du dodécaèdre de la diagonale du pentagone
Cercle de moyenne raison par défaut de la sphère
Arête du dodécaèdre
Rayon inscrit au pentagone de l'Icosaèdre
Icosaèdre.
raison par défaut de la diagonale du dodécaèdre = arête
dodécaèdre
de la face du dodécaèdre
cercle inscrit à la dodécaèdre circonscrite.
Rayon du face du
Rayon sphère
= moyenne raison du côté par défaut.

Rayon inscrit au pentagone icosaèdre
= côté dodécaèdre

Diagonale tropique très peu plus grande que la diagonale du pentagone + complément de sa moyenne par défaut.

Cercle circonscrit au pentagone diagonal de l'icosaèdre

Rayon de la section équa...

Cercle approximativement circonscrit à la face du dodécaèdre

Diagonale moyenne raison par excès de la diagonale

Diagonale de dodécaèdre

Moyenne raison par défaut de l'arête du dodécaèdre

Moyenne raison par défaut de l'arête du dodécaèdre
= segment du dodécaèdre
de la moyenne complémentaire
de la moyenne raison par
défaut de la diagonale.

Rayon du cercle inscrit

Rayon du cercle circonscrit

sphère circonscrite

polaire

pes de volumes euclidiens diagonaux formés peut-être par 2 icosaèdres(?).

Construction géométrique de la suite dodécaédrique par les pentagones inscrits

L'équilibre quaternaire du pentagone ne peut être pleinement réalisé que par 2 pentagones opposés par les sommets, autrement dit par le décagone. Les deux décagones donnent les moyennes raison en fonction, non plus l'un de l'autre, mais en fonction du rayon circonscrit. Le décagone conduit ainsi à un autre mode de génération du dodécaèdre. Le pentagone enfermé dans le cycle est condamné au chevauchement ; hors du cycle, il ne peut construire un réseau indéfini. Le décagone, par une voie indirecte, transforme cette tendance à proliférer en centralisation autour de l'origine et en croissance des proportions.

Du point S, extrémité du rayon primitif pris pour unité, traçons les cordes égales aux moyennes raisons S *d*, S D ; ce sont les côtés des deux décagones inscrits. S *d*, côté du décagone convexe, réalisera les 10 sommets en un seul tour, S D côté du décagone étoilé en 3 tours : il saute de 3 en 3 sommets. A cette opération successive substituons l'opération simultanée qui tracerait symétriquement du point S les deux moyennes et le diamètre prolongeant S O, (naturellement évoqué par le rayon unité). On a immédiatement les sommets d D M_s D' d' du décagone convexe outre le point S. Les sommets p P P' p' ne sont pas atteints ; mais une réaction ten-

dant vers l'équilibre évoque immédiatement les cordes qui joignent le point S à ces sommets, cordes bissectrices des angles formés par les cordes primitives. Les cordes S p, S p', S P, S P' sont les côtés des pentagones inscrits, convexe et étoilé. Elles suppléent ainsi, par réaction, au parcours successif, et rétablissent immédiatement l'équilibre rompu dans le premier tour de cycle accompli simultanément par les deux décagones, ou par leur racé symétrique. Mais, une fois le cycle complètement jalonné par les deux décagones, les deux pentagones à leur tour détruisent l'équilibre puisqu'ils renforcent les sommets *p* P' P' *p* et S, tandis que les sommets *d* D M_s S D' *d'* primitivement les plus forts sont maintenant les plus faibles. La fin de l'opération évoque donc la construction des pentagones qui joindront ces derniers sommets, et s'opposeront par les sommets aux pentagones primitifs.

C'est là une transformation de succession en simultanéité, un quaternaire substitué à un binaire. De plus, la construction décagonale ne peut se poursuivre simultanément par les 2 côtés sans amener un point d'arrêt en MS à l'extrémité du diamètre ; les pentagones opposés par le sommet réalisent la division décagonale simultanément par les 2 côtés plus rapidement et au moyen de deux cycles en sens inverse qui se croisent sans toucher aux mêmes sommets. On obtient ainsi un équilibre dans le mouvement cyclique. C'est le schéma du double courant de rotation qui, par les frottements, développe les électricités de divers ordres.

Les côtés des pentagones ainsi construits ne sont pas les moyennes raisons de la ligne primitive, mais ils ont entre eux la relation réciproque de l'unité à l'une de ses

moyennes raisons. Ils sont liés avec les moyennes du segment origine (autrement dit, avec les décagones inscrits dans le cercle ayant ce segment pour unité par une relation remarquable. Les côtés des pentagones (convexe et étoilé) sont respectivement les hypoténuses de triangles rectangles ayant pour 2e côté respectivement les côtés décagones (convexe et étoilé) et pour 3e côté commun le rayon (segment origine). Ainsi, ils représentent les modules d'une quantité complexe formée par l'unité avec chacune de ses moyennes. Par conséquent dans la genèse qui va suivre, les pentagones qui servent de point de départ représentent une existence réelle constituée par la résultante d'une individualité primitive située dans un autre milieu, avec ses moyennes raisons qui sont par rapport à elle dans le champ de l'idéalité. Le plan du cycle des pentagones inscrits représente donc un mode d'existence provenant de la somme d'une réalité plus reculée avec l'idéalité qui la complète.

***

Ce nouveau plan d'existence aboutit à une transformation de l'impulsion translative en fixation sur un cycle ayant son centre au point origine. Cela répond au cas où l'individu, au lieu de projeter ses moyennes sur les 2 cycles tracés de ses 2 points extrêmes, a voulu suivre, en son point terminal, la direction tangentielle au cycle ayant son centre à l'origine. La force attractive de ce centre originel substitue à cette émission tangentielle (qui ne peut que disperser et désagréger l'individu), deux résultantes ayant leur origine au centre et son extrémité à l'extrémité des tangentes égales

aux moyennes raison. Ces résultantes sont égales aux côtés des pentagones inscrits dans le cycle de rayon unité. L'individu se trouve maintenant pris dans le filet du tourbillon cyclique. Le segment primitif O S dans la 1re dimension servait d'axe longitudinal et marquait la direction ; la construction précédemment étudiée transformait son rôle dans la 2e dimension : il devenait axe transverse, différenciant l'avant de l'arrière. Ici, au contraire, il devient rayon et différencie de nouveau l'origine de la terminaison, mais la translation est changée en rotation. Les grandeurs résultantes vont être portées sur le cycle et se substituer aux moyennes raisons du segment origine pour construire les pentagones. Nous avons déjà vu l'individu pentagonal ayant pour axe transverse le rayon du cycle, le parcourir en 10 étapes se chevauchant 3 par 3. Ici, il a son centre au centre du cycle et l'occupe tout entier. Il ne gravite plus autour du centre, mais pivote sur lui. Cet individu est plus grand que le précédent, plus fortement charpenté grâce à l'entrelac du couples des pentagones et du couple des décagones. Il est fixé, double dans sa polarisation, et jouit d'une double giration en sens contraire qui donne l'équilibre au sein du mouvement. Peut-être est-ce le symbole de la formation des atomes et des corps célestes, ou celui du passage du protoplasme mobile à la cellule fixée, ou encore la transition de la vie nomade à la vie agricole et industrielle, et la transformation mentale qui remplace la curiosité par l'observation. C'est là une transformation dans le mode d'agir sans changement d'espèce.

On voit ici la relation du quinaire et du dénaire. 10 considéré comme 5 + 5 ne donne rien de plus que

tous les nombres pairs, opposant une moitié à une autre et formant un arrêt, ou une rupture au point milieu ; mais 10 exprimé par un double pentagone montre au contraire le mouvement dans l'équilibre par 2 courants en sens contraires. C'est un schéma de l'origine de l'électricité et de la chaleur par le frottement.

Au point de vue des moyennes raisons le lien entre le quinaire et le dénaire est encore plus remarquable : le denaire apparaît comme l'éclosion en 3 éléments distincts d'une relation dont les 3 termes étaient enfermés en deux éléments reliés par réciprocité. C'est la transformation de l'existence phénoménale, qui repose uniquement sur une relation, en l'existence substantielle définie par les rclations dont elle est le terme commun.

Mystères profonds sur lesquels les nombres et les figures jettent une lueur !

***

C'est à cette construction que se rapporte la formule des sommets du dodécaèdre par

$$(5 + \sqrt{5})\,(5 - \sqrt{5}) - 5 = 20$$

Ces quantités sont les numérateurs des carrés des côtés des pentagones inscrits et en même temps du double de la partie imaginaire (sinus) des racines 5e de l'unité. D'autre part, les solutions de la moyenne raison représentant les côtés du décagone sont le double des parties réelles (cosinus) des mêmes racines. Et le côté du pentagone convexe (étoilé) forme avec le côté du décagone étoilé (convexe) un triangle rectangle

ayant le diamètre pour hypoténuse. Si les décagones sont pris pour cosinus ou partie réelle, les pentagones représentent l'élément sinus ou imaginaire d'une quantité module qui est le double de l'unité primitive.

L'élévation des expressions au carré répond à la synthèse de ces éléments imaginaires dans la 1re dimension. Elle indique une direction primitive perpendiculaire à la direction qui a donné les moyennes raisons du segment origine. Cette perpendicularité a pour effet de déplacer le centre de construction et d'augmenter son échelle. C'est une transposition de l'individualité opérée par le complémentaire idéal de ses tendances originaires, complément qui répond au contraste simultané. Et ainsi, l'individu sous l'influence de l'attraction du point originaire, tend à convertir son mode translatif d'évolution en mode statique polarisant la tendance primitive et opposant la masse à la propulsion. Les pentagones inscrits, qui occupent le cycle entier et embrassent à la fois la région réelle et la région imaginaire, représentent l'influence de l'élément négatif dans les solutions positives. Les solutions imaginaires seront la contre-partie distincte de ces solutions. Elles présenteront également plusieurs manières d'évoluer.

On passera des pentagones inscrits au dodécaèdre en conservant le même centre de figure. Le point O devient centre de la sphère. Les deux pentagones convexes opposés par le sommet se déplacent suivant un axe perpendiculaire au plan primitif et parallèlement à eux-mêmes jusqu'à ce que les distances entre sommets voisins deviennent égales à la moyenne raison des côtés des pentagones. Les pentagones étoilés opéreront dans la sphère le tracé par diagonales, en pivotant

sur le milieu de leur longueur. Ils donneront les deux faces parallèles extrêmes. Le dodécaèdre est ainsi formé par le procédé qui paraît le plus simple et qui, par conséquent, exprime le mieux l'essence de la figure.

La distribution des sommets se répartit sur 4 plans parallèles pentagonaux en 2 faces extrêmes, et 2 sections intermédiaires de diagonales des faces; les 10 sommets de la face et de la section diagonale d'un même hémisphère se trouvent sur les méridiens médians des faces de l'autre hémisphère. Le parallélisme du dodécaèdre lui donne quelque analogie genétique avec l'hexaèdre.

***

Le 120-édroïde devra se former en continuant le même procédé. Tandis que les facteur $(5+\sqrt{5})$ $(5-\sqrt{5})$ répondent à une combinaison des pentagones étoilés et convexes, (5^2+5) (5^2-5) doivent correspondre à une combinaison des dodécaèdres étoilé et convexe. On déplacera ainsi parallèlement dans la 4e dimension les dodécaèdres convexes, et on fera pivoter, sur le volume euclidien servant de base, les dodécaèdres étoilés jusqu'à ce que l'on obtienne, entre les éléments, les longueurs des diagonales tropiques et du diamètre de la sphère. (Ces longueurs n'appraissent pas ici comme facteurs, pas plus que les moyennes raisons n'apparaissent dans la genèse du dodécaèdre par les pentagones inscrits.)

On peut se représenter la disposition des sommets répondant à (5^2+5) (5^2-5) comme des dodécaèdres convexes servant de face, groupés de manière à donner des sections diamétrales euclidiennes abou-

tissant à deux faces opposées et contenant 30 sommets : par exemple,comme un groupe de 6 pyramides disposées sur 3 axes, ayant un centre commun au centre de l'hypersphère et pour base, chacune, un pentagone.

Enfin, concevant le facteur 30, non comme coefficient des sommets d'un dodécaèdre étoilé, mais comme nombre des arêtes, on peut concevoir le 120-édroïde comme obtenu en faisant éclore, autour de chaque arête prise comme axe, un dodécaèdre indépendant, les arêtes s'étant disjointes en tournant dans la 4e dimension. On aurait alors tous les sommets avec 30 dodécaèdres dont les intervalles constitueraient les 90 autres dodécaèdres.

Solutions imaginaires

La construction de l'icosaèdre donnée par les solutions imaginaires du partage d'un axe en moyenne et en extrême raison, correspondant aux racines cubiques imaginaires de l'unité, se traduit géométriquement par deux rayons, faisant de part et d'autre, avec l'axe à partager, un angle de 60°. Si l'on joint les extrémités de ces rayons aux extrémités de l'axe,on obtient deux triangles équilatéraux accolés sur l'axe et formant un losange qui est le tiers de l'hexagone ayant pour côté l'axe lui-même. Il suffit d'incliner ces deux triangles sur l'axe de manière à ce qu'ils forment un dièdre ayant pour sinus 2/3 (angle de 138° 11' 22" 75) pour avoir 4 sommets voisins de l'icosaèdre.

Tous ces angles expriment de manière différente les nombres du contraste successif. Chaque racine iso-

lement donne l'angle de 60° et la longueur du rayon ; c'est le contraste successif minimum. La corde de 120° et le triangle équilatéral auquel elle correspond donnent le contraste successif maximum. Le losange, qui donne 4 sommets à la condition d'être lié suivant un dièdre de sin. 2/3, marque encore le rapport du contraste maximum. Or la corde qui, dans l'icosaèdre, réunira les côtés opposés de ce losange plié est égale à la moyenne raison par excès (solution réelle) de l'arête qui nous a servi de point de départ. En effet, cette ligne est une des diagonales des pentagones formés par les arêtes de l'icosaèdre. Ainsi, c'est la continuation du même algorithme qui nous conduit à la construction de l'icosaèdre.

La figure primitive du partage imaginaire de la droite doit s'effectuer en sens inverse de la direction de la droite, puisque le carré de cette droite est une quantité négative. La figure affectera donc la forme d'un Y, qui marque le contraste successif maximum appliqué au cycle entier.

On remarquera la valeur symbolique de cette figure, qui constitue aussi la lettre grecque γ minuscule et la lettre y dans les diverses langues aryennes, et sert d'initiale à la plupart des termes exprimant la femme et la fonction génératrice (*yoni*, γυνή, γένος, génération, et comme *y*, *hyle*, υλή, etc.)

Ce symbole est le schéma du tracé des aines et de la jointure des cuisses chez la femme ; c'est aussi celui de l'appareil génital interne. Si l'on prolonge l'axe entre les deux branches, le symbole devient encore plus caractéristique au point de vue de la fonction génératrice. C'est encore le schéma le plus élémentaire de l'arbre,

et il a été adopté par certains mystiques (1) comme représentant la croix du Sauveur. L'adjonction de la perpendiculaire menée par les extrémités des bras achève la figuration du crucifiement et représente, réunit la croix en Y et la croix quaternaire. On peut considérer les bras du Christ soit comme horizontaux sur la croix en Y, soit à angle de 60° sur la croix rectangulaire.

Si l'on remplit les triangles formés par ce schéma, on arrive à cet autre symbole de l'Aigle ou du Scorpion zodiacal. Ce symbole marque l'union des contrastes maximum successifs et simultanés, tandis que leur produit 4 × 3 donne la construction de l'icosaèdre.

On voit à quelles méditations profondes conduirait le rapprochement des diverses idées métaphysiques évoquées par cette construction géométrique. Ici constatons simplement la concordance établie entre le contraste maximum successif, les racines imaginaires de la moyenne raison et la fonction féminine dans la génération.

***

La moyenne raison doit réaliser deux types purs que l'individu contient en principe, l'un altéré par des superfétations, l'autre par des mutilations. Les solutions imaginaires correspondent au cas où l'individu en question est virtuel ; son carré est une réalité négative, se projetant par conséquent en sens opposé des quantités positives sur l'axe des réalités. Or les types qui correspondent à cette individualité virtuelle ne s'opposent,

(1) Entre autres par la Bienheureuse Cath. Emmerick.

par addition et retranchement, que dans leur partie qui sort de la réalité (les sinus); l'autre partie, égale à la moitié de l'individualité réelle correspondante (cosinus = ½ du rayon), est commune aux deux types conjugués.

Les deux branches divergent de manière à réaliser le contraste maximum successif entre elles et le contraste minimum simultané par rapport à la tige.

Si cela est véritablement le schéma de la femme comme génératrice nous traduirons ces éléments géométriques comme il suit: l'homme étant figuré par un rayon dirigé, le rayon qui forme avec lui diamètre représente la contrepartie de son action qui maintient l'équilibre par rapport à l'origine. Ce rayon négatif, n'existant que par réaction de l'énergie développée en sens inverse, est pour ainsi dire le reflet, l'écho de cette énergie ; il est une résultante de l'ébranlement produit dans tout le cycle par le mouvement du rayon positif. Le rayon primitif cherche d'abord son équilibre par rapport à la résistance qui s'oppose directement à lui : de là deux optima de développement, l'un en deçà, l'autre au delà de sa limite, par lesquels il se fortifie en dedans et se pose un appui au dehors. Ce sont les moyennes raisons réelles.

L'énergie contraire, développée par réaction, ne provient pas comme l'énergie directe d'un foyer unique représentant la force véritable, spirituelle, agissant par propulsion, mais consiste en une résultante de mouvements passifs issus d'une multiplicité qui représente le mécanisme de la matière. Cette résultante tend, elle aussi, vers un optimum d'appui pour maintenir l'équilibre et non pour agir. Cet optimum consiste dans les deux directions à 120°, qui en même temps forment le même angle

avec le rayon positif ; et ainsi le binaire découle naturellement de la réaction à l'unité et de l'effort à maintenir la stabilité en face de l'action.

Or, pour que l'action ne soit pas paralysée et pour qu'en même temps la stabilité soit maintenue, il faut que l'opposition soit successive ; chacun des 3 points contrastant à 120°, il y aura conversion du mouvement expansif indéfini en mouvement cyclique successif. L'expansion recevra alternativement les 3 directions, l'une étant positive, les 2 autres négatives. C'est le rythme à 3 temps avec un temps fort et deux temps faibles.

La moyenne raison réelle est donc formée par les deux optima pour l'action rectiligne, pour l'avancement; la moyenne raison imaginaire par les deux optima pour le maintien de l'ensemble centralisé.

On reconnaît bien à ces caractères, aussi bien physiques que moraux l'homme et la femme. L'un perfore, l'autre enveloppe : la flèche de Mars et le croissant de Vénus. Et la femme contraste au maximum avec l'homme, mais successivement, en ce sens qu'il n'y a pas arrêt, polarisation de l'un par l'autre, mais libration de l'un à l'autre. La femme représente ce contraste par les deux côtés ; et les deux rayons qui la caractérisent, contrastent de même ensemble. Et l'homme va à elle par deux voies inverses répondant aux deux sens du cycle : le cycle direct répond au cours des astres sur l'écliptique, le cycle inverse répond à celui du mouvement diurne apparent. En astrologie, le premier conduit vers le point marqué par les appétitions sensibles (5e maison), le second, vers le point marqué par l'initiation (9e maison): symbolisme profond, l'un d'activité et de vouloir, l'autre d'attraction et de passion.

Toute femme est ainsi double comme réalisation, tandis que l'homme est sollicité par deux sens de réaction. C'est cette réaction double de la femme qui arrête la propulsion masculine quand elle a atteint la circonférence qui marque les bornes de la croissance. C'est grâce à cette réaction que l'homme engendre par la femme, et que le centre se trouve revivifié. L'angle féminin de 120° a alors pour bissectrice le rayon réel négatif, qu'il enferme en son milieu, et au contraste maximum successif entre les éléments sexuels se trouve substitué le contraste minimum successif, qui donne accès à l'alternance rythmique des deux sexes.

***

Dans la construction précédente, le contraste maximum simultané du quaternaire apparaît à l'intérieur de l'angle féminin. Il forme les composantes trigonométriques des deux rayons donnés par le rayon et par la corde de 120°. Et ainsi, la polarisation quaternaire apparaît au sein de la femme pour immobiliser le principe mâle qu'elle contient. Les deux rayons qui, portés sur le cycle, sont symétriques des deux rayons à 120° constituent un losange dont un seul axe est tracé, celui qui est formé par le rayon bissecteur. C'est cette vulve qui sera l'élément de l'icosaèdre.

La femme, principe de fixation, de stabilité et d'étendue, enferme en elle le quaternaire. L'axe imaginaire n'y est pas tracé par la figure, mais il existe virtuellement, et son rôle actif apparaîtra comme déterminant la formation de l'icosaèdre. Ici il est, par rapport à l'autre axe (celui qui répond au principe masculin) inclus dans

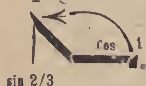
la femme dans le rapport de $\sqrt{-3}$ à 1. Ce rapport représente probablement l'intensité de l'idéalité par laquelle la femme polarise l'impulsion de l'homme tendant vers un infini indéterminé, et le tourne vers le défini réalisé. Plus loin, l'analyse du nombre $1 \pm \sqrt{-3}$ militera en faveur de cette interprétation.

Construction de la suite icosaèdrique

Pour construire les losanges gauches qui donnent l'élément icosaédrique, il y aura contraction de cette corde égale à $\sqrt{-3}$, dès que le champ de la 3e dimension déplacera le centre du cycle sur un axe perpendiculaire au plan du cercle. Le cercle primitif n'est alors que la section normale d'un cône ; il représente un des plans d'existence d'un kosmos plus vaste, l'abstraction d'une réalité plus concrète. La centralisation est alors sphérique et l'attraction du centre de la sphère brise le losange suivant le rayon négatif. La corde de l'angle de 120° se contracte ; le losange forme un dièdre ayant pour face deux triangles équilatéraux d'arête égale au rayon du cercle. Cette corde (axe imaginaire du losange plan) devient diagonale de l'icosaèdre (ou arête de l'icosaèdre étoilé). Or cette diagonale est la moyenne raison réelle par excès de l'arête de l'icosaèdre connu, donc du rayon primitif. Et ainsi, l'individualité dont la moyenne raison par excès n'a pu s'accomplir dans le plan d'existence précédent, et qui a été détournée de sa fin par la réaction féminine, réalise maintenant cette moyenne, son type expansif optimum, dans un milieu plus concret et comme

clef de voûte de la matrice féminine, l'autre axe étant l'équivalent négatif de son unité mâle.

En même temps, le dièdre auquel s'arrête cette brisure du losange répond au sinus 2/3 (1), rapport de quinte exprimant le contraste maximum par son complément. Ici, le contraste existe entre deux longueurs. La position du sinus par rapport au rayon évoque une force qui arrête la décroissance de l'angle comme par une attache au plan d'origine, suivant le schéma ci-contre sin. 2/3



: c'est comme l'attraction du plan primitif. Faut-il voir dans cette proportion 2/3 l'expression quantitative des liens apportés par la polarisation sexuelle et s'opposant à l'évolution sur un plan supérieur ?

***

Cette construction des trois points de contraste maximum successif dans le plan doit être considéré comme s'accomplissant dans la 1re dimension complexe. Le développement de l'algorithme des moyennes raisons imaginaires dans la 2e dimension correspond à la construction de trois losanges égaux aux précédents, prolongeant trois segments égaux au rayon primitif et disposés en triangle équilatéral. Ce triangle est l'expression élémentaire et typique à la fois

(1) En fonction de l'arête, ce sinus a pour valeur $\frac{2}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

des deux contrastes successifs maximum et minimum, suivant le point de vue auquel on le considère. Il représente donc la solution optimum des moyennes raisons imaginaires dans la 2e dimension.

Les 3 losanges groupés autour de lui se briseront et s'inscriront dans la sphère par la seule tendance à établir, entre tous les sommets non voisins et non extrêmes, la moyenne raison réelle par excès du segment primitif. Une fois cela réalisé, les rayons primitifs cessent de se trouver dans le plan diamétral qui passe par les arêtes bissectrices des losanges. A chacune de ces arêtes, répondent deux côtés du triangle primitif et la relation du contraste et des éléments sexuels se trouve échangée. Cette transformation est suggestive de la ressemblance fréquente des fils avec la mère et des filles avec le père. De plus, cette transformation s'opère en fonction d'un milieu plus concret, comme si les sexes s'échangeaient en passant sur un plan supérieur, mais seulement dans ce qu'ils ont de compatible et de transitif (contraste minimum). Par exemple, les caractères féminins organiques antithétiques du mâle devenant dans le psychique caractères masculins par leur adaptation au sexe opposé. Mercure serait le type de cette transmutation.

Les trois losanges brisés et inscrits dans la sphère par la construction précédente donnent l'icosaèdre tout entier. L'icosaèdre exprime donc les contrastes maximum à deux degrés. La sphère se trouve divisée en régions égales par ces trois losanges; les intervalles qui les séparent constituent sept losanges égaux aux premiers. Ainsi, les centres des trois losanges primitifs réalisent en fonction de la 3e dimension le contraste maximum successif dans

sa forme la plus élémentaire. Le contraste minimum est marqué par les centres des 10 losanges brisés de l'icosaèdre, au lieu de 6 triangles qui, en 2e dimension, répondent à ce contraste.

***

La construction du 600-édroïde se conçoit par continuation du même procédé. Les trois rayons qui exprimaient le contraste maximum successif dans le cercle sont devenus trois losanges dans le cercle qu'on a ensuite brisé en dièdre de sin. 2/3. De la même manière, transformons à leur tour les 30 arêtes de l'icosaèdre en losanges indépendants. Nous aurons les 120 sommets du 600-édroïde. 120 est formé ici par $4 \times 30 = (3+1)(3^3+3)$.

Mais le centre de l'hypersphère va accentuer la brisure des losanges jusqu'à ce que les volumes ainsi formés deviennent les tétraèdres constitutifs de l'enveloppe du 600-édroïde. Ici le dièdre (70° 37' appr.) a pour cos. 1/3, nombre du contraste maximum simultané complémentaire de 2/3 donné par le sinus en 3e dimension.

La corde donnée par la brisure du losange n'est plus là une ligne intérieure à l'enveloppe; elle n'est pas non plus la moyenne raison de l'arête, mais égale à l'arête elle-même qui a servi à la construction, et cela semble marquer un cycle accompli.

30 tétraèdres indépendants déterminent le 600-édroïde, et laissent des intervalles consistant en tétraèdres égaux aux précédents qui complètent le nombre de 600. Les contrastes successifs dans l'espace à 4 dimensions semblent donc répondre à 1/30 comme maximum, à 1/600

comme minimum au moyen des éléments les plus simples possible.

***

Cette construction du 600-édroïde pourrait se déduire encore d'un autre procédé primitif, remontant à l'hexagone entier réalisé par la division du cycle primitif dans tous les sens. L'établissement des contrastes maximum successifs ayant pour effet de diviser le cercle en trois secteurs égaux, on peut concevoir la division primitive du 3e secteur négatif en deux triangles équilatéraux comme se répétant dans les deux autres. Cela constitue l'optimum de réalisation de l'algorithme en fonction du cycle primitif. Le cycle se trouve donc divisé par un hexagone régulier et ses six rayons, de telle sorte que les relations de contrastes sont réciproques et renversables entre les six régions.

Cette formation exprime la synthèse harmonieuse de beauté réalisée par la pénétration des sexes, un état statique et fixé, ne s'opposant pas au mouvement, puisque les divisions sont celles du contraste successif et qu'on peut subdiviser l'hexagone en deux tétraèdres alternés, donc en un parcours du cycle par contraste maximum dans les deux sens et sans arrêt. Ici, c'est la béatitude du mariage heureux qui ne désire plus agir; c'est une finalité atteinte. Et il est impossible avec l'hexagone de construire un angle polyèdre. Il s'affaisserait sur le plan équatorial. Pour obtenir le pentaèdre de l'icosaèdre, il faudrait réduire l'hexagone aux 5/6 ;il donnerait alors la pyramide polaire de l'icosaèdre.

Mais le jeu des deux tétraèdres entrelacés va provoquer l'icosaèdre par une autre voie. Comme Tannehauser, las des voluptés persistantes et désireux d'agir et d'embrasser de plus vastes horizons, le vivant ne se satisfait pas de béatitude passive. Et ainsi les deux contrastes maximum des tétraèdres entrelacés renonçant au minimum obtenu par l'hexagone, cherchent les moyennes raisons réelles entre leurs sommets. L'étoile à six branches va se gauchir, le pantacle de Salomon va se contracter pour obtenir, par les côtés de ses triangles, les moyennes raisons du rayon, et cela sans perdre la division hexagonale du cycle. De là le gauchissement qui donne l'hexagone méridien de l'icosaèdre. Chaque arête, qui n'était que virtuelle dans l'étoile à six branches (et non tracée), s'écrit alors en face de sa moyenne réelle par excès ; et comme moyenne imaginaire, elle se dédouble pour donner la fourche du contraste maximum successif ; l'icosaèdre se trouve tout entier réalisé, les arêtes restantes résultant des distances entre les premières. Ici, la formule serait 6×2 ou mieux 2. 3. 2.

Cette construction en évoque une autre d'origine plus reculée et expressive de mystères plus profonds. C'est celle par 4 triangles équilatéraux entrelacés que nous étudierons tout à l'heure

***

L'icosaèdre peut être obtenu aussi par l'entre-croisement de 12 triangles équilatéraux, sorte de tétraèdre étoilé, si l'on peut appeler ainsi une figure à volume virtuel. Dans cette genèse, les arêtes seront la moyenne raison par défaut des lignes primitives. A ce titre, il pré-

sente une corrélation et une opposition avec l'octaèdre. Comme l'octaèdre, il est ramené à une genèse par intersection de lignes et de plans et non par des éléments périphériques. Dans l'octaèdre, on réalise le contraste simultané maximum ou quaternaire (perpendicularité) en fonction des 3 dimensions, au moyen de 3 carrés orientés suivant 3 axes perpendiculaires. Dans l'icosaèdre, on réalise le contraste successif maximum (un tiers du cycle) en fonction des 3 dimensions au moyen de 4 triangles équilatéraux formant un tétraèdre intérieur, orientés suivant 4 directions contrastant entre elles au maximum.

La géométrie nous donne ici un schéma remarquable de la transition du quaternaire au ternaire, et réciproquement, au moyen d'un septénaire formé par deux groupes d'éléments très distincts, l'un jouant le rôle d'objet matériel, l'autre celui de canon distributif. L'octaèdre et l'icosaèdre nous montrent l'interchange de ces deux fonctions.

Cette combinaison du ternaire et du quaternaire apparaît également dans le tétraèdre, mais elle y est moins unifiée, simplement obtenue par addition de l'unité aux 3 sommets du triangle. Les 6 arêtes montrent une combinaison incomplète, puisque c'est la multiplication de 3 par la racine de 4 : 6 représente ici le minimum successif obtenu en combinant le maximum successif 3 au minimum simultané 2. Le tétraèdre montre donc prépondérance du successif sur le simultané ; donc, une réalisation non saturée et apte à évoluer indéfiniment. En effet, le tétraèdre se retrouve comme volume dans toutes les dimensions indéfiniment.

Seul l'hexaèdre, qui exprime la graduation dans

toute sa pureté, traverse également toutes les dimensions. Il marque la stabilité la plus complète, stabilité réalisée, non pas par neutralisation entre principes hétérogènes, mais par un degré du développement du principe dans toute sa pureté.

L'octaèdre combine les deux maximum de contraste successifs et simultanés dans ses 12 arêtes. Mais cette combinaison complète ne figure que dans l'élément intermédiaire. Les 6 sommets présentent encore une condition non saturée ; et les 8 faces représentent 2^3, c'est-à-dire le contraste successif maximum appliqué à la graduation de 2. Cette dissymétrie explique la prolongation de la série, ainsi que de celle de la série hexaédrique, où les mêmes nombres se retrouvent et où les éléments non saturés servent d'excitants pour développer la graduation.

Mais l'octaèdre ne se développera pas comme tel indéfiniment ; le représentant de sa série illimitée dans la 4e dimension a pour volumes enveloppes, non des octaèdres, mais des tétraèdres. Il a également un dérivé ayant pour limite 24 octaèdres, c'est le 24-édroïde ; mais cette suite est close avec lui, car le nombre 24, nous l'avons déjà vu, manifeste dans toutes ses faces la combinaison la plus complète du ternaire et du quaternaire, les contrastes maximum et minimum, successifs et simultanés.

L'octaèdre s'élimine donc dans la 4e dimension pour la série octaédrique, et c'est le tétraèdre qui succède à la face donnant toujours pour figure enveloppe celle qui a le moins de côtés et de sommets. De même, c'est le tétraèdre, et non l'icosaèdre, qui constitue le volume-enveloppe du 600-édroïde.

***

La formule 12 × 10 n'exprime donc pas cette forme en fonction des faces; mais, si nous substituons aux 4 triangles diagonaux 10 icosaèdres diagonaux, s'entre-croisant dans la 4e dimension, ils donneront les 120 sommets. La combinaison 10 × 12 paraît ainsi exprimer, par rapport à la 4e dimension, la relation du contraste successif maximum réalisé au moyen de 10 icosaèdres, c'est-à-dire au moyen des éléments les plus complexes possible. Le nombre 10 ici représente (comme 4 en 3e dimension) le contraste maximum simultané. Cette filiation est indiquée algébriquement par les formules que nous avons établies $(1 \pm \sqrt{-3})$ et $(3 \pm \sqrt{-1})$ l'élément $\sqrt{-1}$ imaginaire étant toujours relatif au contraste simultané puisqu'il exprime l'angle droit, tandis que $\sqrt{-3}$ exprime un angle de 120° et l'élément successif. Cette fonction du nombre 10 est très remarquable au point de vue cabalistique. D'abord, il véhicule le mouvement par le moindre effort, et répond au rythme à travers l'existence à 3 dimensions; il y est donc progressif. Dans la 4e, il marque une finalité atteinte; il devient une fonction quaternaire et statique. Ce caractère de progrès vers une finalité peut expliqué en partie la prédominance du système décimal pour la numération, la numération étant une relation progressive. Au contraire, quand il s'agit de demeurer dans un cycle fermé, c'est la division duodénaire qui est la plus normale, et là elle est tellement instinctive, qu'elle continue à être employée malgré les complications qu'elle entraîne dans les opérations effectuées avec le système décimal. 120 apparaît comme la synthèse de ces deux processus l'un progressif, l'autre cyclique et répétitif.

La formule 4 × 3 exprimait encore pour l'icosaèdre

le nombre des sommets contenus dans un plan d'intersection suivant une arête et passant par le centre de la sphère ; la formule 10 × 12 indiquerait, à ce point de vue, des volumes euclidiens passant par le centre de l'hypersphère et intersectant le 600-édroïde suivant des faces (par conséquent des triangles). Chacun de ces volumes consisterait en deux pyramides triangulaires opposées par les bases ayant un sommet commun au centre de l'hypersphère et formant, avec un des losanges gauches constitutifs de l'icosaèdre, une figure à symétrie réduite ayant 10 sommets.

***

Dans l'icosaèdre, l'arête et la diagonale s'inscrivent dans un demi-grand cercle. Si l'on prend l'arête pour unité, la diagonale vaut $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$, le diamètre de la sphère inscrite étant l'hypoténuse du triangle rectangle formé avec ces 3 longueurs, on aura

$$4R^2 = 1^2 + \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^2 = \frac{10+2\sqrt{5}}{4} = \frac{5+\sqrt{5}}{2}$$

$$\text{d'où} \quad 2R = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}$$

Le diamètre de la sphère circonscrite est donc égal au côté du pentagone étoilé inscrit dans le cercle qui aurait cette arête pour rayon. Il serait le côté du pentagone convexe inscrit dans le cercle qui aurait la diagonale pour rayon. Ainsi, arête, diagonale et axe expriment l'unité et les deux parties sinus et cosinus des racines imaginaires 5[e] de l'unité. L'icosaèdre continue d'être

l'expression complète des racines imaginaires de l'unité, et ceci justifie l'origine que nous lui avons attribuée.

***

En partant des 6 axes de l'hexagone dans le plan, la genèse de l'icosaèdre, par un mouvement de pivot de ces axes dans la 3e dimension, en même temps que de contraction, indique un nouveau mode génétique fort expressif. Ici, c'est la même tendance originaire à compléter l'élément réel par l'élément imaginaire, le principe féminin venant arrêter l'impulsion aveugle par la contemplation, et apportant d'une manière déterminée et sur un plan supérieur, la réalisation de la finalité impossible à réaliser dans le plan primitif. Les axes de l'hexagone vont pivoter jusqu'à ce qu'ils réalisent, l'unité entre les sommets voisins, la moyenne par excès entre les éloignées. Mais cela exige une contraction des axes. Et cette contraction se règle de façon à fournir l'élément complémentaire (sinus) du cycle des racines imaginaires 5e, les moyennes raisons n'en donnant que l'élément réel (sinus). C'est toujours le rôle équilibrant, pondérateur et ramenant à l'équilibre cyclique. 12 à ce point de vue répond à un contraste minimum ; ce sont les 6 points devenant 6 axes dans la 3e dimension. En 4e dimension, ces 6 axes donneront 20 sommets, et on peut concevoir à ce point de vue, le 600-édroïde comme formé par les diamètres de l'icosaèdre devenant chacun un dodécaèdre. On aurait alors la formule 20 × 6 faisant suite à 6 × 2.

***

L'icosaèdre est enfin l'expression très directe des solutions réelles de la moyenne raison. En effet, le pentagone étant construit par le développement en mode condensateur de cet algorithme dans le plan, l'icosaèdre représente le même processus relativement à la 3e dimension. En effet, de même que le pentagone donne au bout des diagonales, d'un côté, une arête, de l'autre une diagonale, de même, d'un côté du plan, on émet des arêtes, de l'autre les diagonales. Les deux pôles seront ainsi formés. Aux diagonales parvenues au pôle éloigné devront succéder des arêtes, et ainsi seront donnés les 5 sommets restants formant un pentagone égal, parallèle et opposé par les sommets au pentagone dont on est parti.

On aurait pu procéder par la périphérie, comme on le fait aussi dans la construction du pentagone, et obtenir ainsi toutes les arêtes groupées par 5 autour d'un sommet. L'icosaèdre joue ainsi, par rapport au pentagone, un rôle qui ressemble assez à celui que joue la série octaédrique par rapport au carré. L'icosaèdre exprime ainsi la continuation la plus réduite de l'algorithme de la moyenne et extrême raison sous forme réelle et réciproque et de la construction pentagonale qui y correspond ; il exprime en même temps la forme imaginaire de cet algorithme par ses faces triangulaires. Aussi, on devra, suivant le point de vue considéré, prendre le facteur 4 comme $(5 + 1)$ ou $(3 + 1)$.

On continuerait le 600-édroïde sur l'icosaèdre comme on a construit le pentagone autour de sa diagonale et l'icosaèdre autour de son pentagone, en émettant de chaque sommet, une arête sur un côté du volume euclidien contenant l'icosaèdre, et de l'autre côté, une diagonale, etc.

Le 600-édroïde apparaît alors comme continuant à 4 dimensions le développement, la moyenne et extrême raison réciproque entre l'arête et la diagonale du pentagone, et marque la limite de son expansion géométrique par rapport au principe centralisateur métaphysique.

***

La loi métaphysique, dont la moyenne raison est le symbole mathématique, conduit donc à cette constatation : l'être poursuivant l'optimum de conditions réalisant son type trouve deux solutions dans son plan d'existence (1re dimension). Ces solutions peuvent se multiplier à condition de pénétrer dans la 2e dimension (plan immédiatement supérieur, 2e puissance de la modalité linéaire). Là, elles se distribuent de manière à réaliser une figure définie, régulière, qui exprime l'optimum de réalisation de ce type.

Ces 2 solutions étant données par réciprocité, entre les 2 éléments constitutifs de la même figure (pentagone convexe et étoilé). nouvel optimum réalisable sur un plan supérieur, celui des volumes, réalisé par l'icosaèdre Enfin, avec le 600-édroïde le processus semble épuisé dans la 4e puissance de la ligne. C'est le cycle quaternaire des puissances affecté à la moyenne et extrême raison. Faut-il y voir l'indication que l'individualité a 4 plans d'ascension à gravir, 4 degrés d'idéal à réaliser après lesquels son rôle est terminé ? Profonds mystères qu'on n'ose chercher à pénétrer.

Générations des termes intermédiaires

La loi de génération des sommets de la suite icosaédrique est celle de la génération des enveloppes (faces en 3e dimension, volumes en 4e dimension) de la suite dodécaédrique et réciproquement. Chacune de ces suites conjuguées construit l'un de ses termes extrêmes par les solutions réelles, l'autre par les solutions imaginaires de la moyenne raison ; chacune marque donc la synthèse des deux influences pour ainsi dire mâle et femelle que ces solutions expriment.

Les termes intermédiaires doivent participer à la fois de ces deux influences, et s'obtenir par une certaine relation entre les solutions réelles et les solutions imaginaires. Dans la synthèse manifestée par ces formes régulières, ils représentent ce qui, dans l'organisme, est obtenu par l'influence réciproque des deux pôles de la sexualité, et, à un point de vue plus métaphysique, à l'élément neutre d'une la réalité dont les termes élémentaires représentent l'élément être et l'élément savoir.

Il s'agit de déterminer en quoi consiste cette relation et comment elle s'obtient.

Les 4 solutions de la moyenne raison consistent en binômes dont le 1er terme est toujours 1/2 et le 2e terme un radical : $\pm\frac{\sqrt{-3}}{2}$ (pour les imaginaires), $\pm\frac{\sqrt{5}}{2}$ (pour les réelles). L'élément 1/2 est la réponse la plus immédiate de toute quantité à l'action divisionnelle générique et indéterminée dans son quantum. 1/2 est la détermination caractéristique qui résulte spontanément de la nature de toute quantité.

Au contraire, l'élément radical introduit des nombres spéciaux qui ne sont nullement déterminés par la quantité soumise à la division, et d'autant plus hétérogènes avec elle qu'ils sont incommensurables. L'élément radical est ici la caractéristique de cette modalité spéciale de division que doit obtenir les moyennes raisons. Il provient de la nature même de l'opération à effectuer. Il représente l'adaptation quantitative d'une modalité d'action qualifiée ; il manifeste, dans la division de la quantité, l'ingérence d'un principe étranger, qui détermine le rapport tout à fait spécial et incommensurable des parties obtenues.

Pour isoler cet élément radical, il suffit de prendre les différences des racines réelles deux à deux de toutes les manières possibles. La différence entre les solutions réelles $= \frac{\sqrt{5}}{2}$; celle entre les solutions imaginaires $= \frac{\sqrt{-3}}{2}$. Les différences entre chaque solution réelle et la solution imaginaire de même signe sont en même temps les sommes entre chaque solution réelle et la solution imaginaire de signe contraire. Ces différences entre les solutions par défaut $= \frac{+\sqrt{-3} - \sqrt{5}}{2}$ entre les solutions par excès $= \frac{-\sqrt{-3} - \sqrt{5}}{2}$

Chassons, comme toujours, les dénominateurs (ce qui équivaut à attribuer à la ligne la valeur 2 puisqu'on la considère comme lien ou séparation entre 2 sommets). Ensuite, multiplions les deux quantités monômes et élevons le produit au carré. On a $(\sqrt{-3}\sqrt{5})^2 = -15$. Multiplions entre elles les deux quantités binômes

$(+\sqrt{-3}-\sqrt{5})\ (-\sqrt{-3}-\sqrt{5}) = [(-(-3)-5)]$
$= (+3-5).$

Nous ne prendrons pas le carré de ces quantités, parce que chacune d'elle exprime des relations qui impliquent déjà la réunion de deux dimensions, tandis que les deux différences binômes ne s'effectuent qu'entre éléments appartenant à une seule dimension, soit réelle, soit imaginaire.

Le nombre des arêtes est donné en multipliant l'un par l'autre ces deux groupes de facteurs. On a ainsi

$$(3 \times 5)\ (5-3) = 3.\ 5^2 - 3^2.\ 5 = 75 - 45 = 30$$

***

Les diverses quantités qui ont réalisé ce produit répondent chacune à une distribution géométrique. Chacun des deux monômes $\sqrt{-3}$, $\sqrt{5}$ déterminent, nous l'avons vu, la division du segment originaire dans la 1re dimension réelle ou imaginaire. Le carré de ces quantités exprimera la distribution qu'ils introduiront dans la 2e dimension. Le produit de leurs carrés donnera la combinaison de cette distribution, par conséquent la combinaison du triangle avec le rayonnement de 5 arêtes, ou celle du pentagone avec le rayonnement de 3 arêtes. De là les trièdres à faces pentagonales (dodécaèdre) et les pentaèdres à faces triangulaires (icosaèdre).

Les binômes $(\pm\sqrt{-3}-\sqrt{5})$ proviennent de l'association d'une solution réelle avec une solution imaginaire. Cette association répond aussi à des lignes tracées sur le cycle. En effet, comme nous l'avons vu, $\dfrac{\pm\sqrt{-3}}{2}$

sont les portions sinus des solutions imaginaires, et leur réunion constitue la corde de 120°, perpendiculaire au rayon orginaire OS. C'est sur ce rayon et à partir du centre O que sont portées les solutions réelles dans le sens O S. Or, la quantité $\frac{-\sqrt{5}}{2}$ est égale à la solution réelle par défaut augmentée de la quantité 1/2, qui est justement la longueur de la partie cosinus des solutions imaginaires. Le signe — indique que la quantité est prise dans la direction négative, et $\frac{-\sqrt{5}}{2}$ est la distance du point M au pied du sinus de 120°. Les quantités $\frac{\pm\sqrt{-3}}{2}$ et $\frac{\sqrt{5}}{2}$ représentent donc 2 triangles rectangles accolés, et dont les hypoténuses joignent le point du rayon O S donné par la solution réelle par défaut aux deux points conjugués du cycle donnés par les solutions imaginaires. Cette hypoténuse aura donc pour longueur $\sqrt{\left(\frac{\sqrt{-3}}{2}\right)^2 \times \left(\frac{\sqrt{-5}}{2}\right)^2} = \sqrt{2}$ c'est-à-dire la longueur du carré inscrit dans le cycle. Cette ligne est la résultante des deux principes indépendants de l'unité, qui interviennent respectivement dans les solutions réelles et dans les solutions imaginaires. Cette valeur $\sqrt{2}$ est remarquable car, c'est (comme nous le verrons plus tard) le nombre radical de la sexualité. D'autre part, la différence (5—3) = 2 donne la valeur du diamètre du cercle, soit la réunion du rayon primitif avec son opposé, la synthèse de l'opposition primordiale.

La forme (5 — 3) que revêt ici le nombre 2 décèle encore la relation distinctive entre les solutions réelles et les solutions imaginaires. En effet, les solutions

réelles donnent 5 segments avec 3 sommets ; 5 segments savoir : la ligne primitive, les 2 longueurs des racines et les 2 longueurs complémentaires formant le facteur qui multiplie le segment primitif pour donner la moyenne raison ; 3 sommets, savoir : le point terminal de la ligne primitive et les 2 points déterminés par les solutions. L'origine n'est pas un sommet, mais le germe du centre de toutes les formes régulières qui se développent dans les diverses dimensions. — Les solutions imaginaires donnent 3 segments et 5 sommets ; 3 segments, savoir : la ligne primitive et les longueurs des racines. Les racines sont données ici par des lignes complexes ; leur extrémité n'est pas sur le segment primitif ; les longueurs complémentaires des racines ne sont pas déterminées par la construction et demeurent virtuelles. Donc, 3 segments seulement. Par contre, ces 3 segments donnent 5 sommets, savoir : l'extrémité de la ligne, les extrémités des racines et le point double qui sépare la partie réelle commune aux deux racines de leurs parties imaginaires conjuguées.

***

Les radicaux $\sqrt{-3}$ et $\sqrt{5}$ expriment les deux ferments qui amènent l'individualité à caractériser son type en éliminant toute altération accidentelle. Le premier indique l'action femelle qui rattache le sujet à sa souche, et retient son énergie pour la re production de le second indique l'action mâle, qui fortifie le sujet dans l'espèce ; sa situation et règle son orientation. Le produit de ces radicaux représente la combinaison de ces deux actions : ce qui résulte de l'union des principes sexuels. C'est $\sqrt{-15}$.

Les binômes $(+\sqrt{-3}-\sqrt{5})$ représentent : l'un, la somme et, par conséquent, la synergie ; l'autre, la différence, et par conséquent l'antagonisme des deux radicaux. A côté de l'union pour un acte commun, c'est la coopération explicite et distincte. Le produit de la somme par la différence indique la combinaison de la synergie et de l'antagonisme. Cette combinaison est une des grandes lois métaphysiques de l'évolution. C'est un des modes primordiaux qui concilient la similitude avec la distinction. La synergie confond, l'antagonisme distingue. Leur combinaison est ce qui permet l'association en conservant les individualités. Répartie dans le temps, elle donne le rythme, car elle crée un temps fort par la synergie, un temps faible par l'antagonisme ; en mécanique, elle régularise le mouvement par une réaction partielle ; elle fonde enfin l'intelligibilité discrète en réunissant la ressemblance et la différence, qui sont les bases de la quantité et de la qualité.

Le nombre des arêtes, 30, est donné en multipliant l'un par l'autre le produit du carré des deux monômes par le produit des binômes, Ce produit de produits exprime donc la combinaison de l'action commune des deux principes des solutions réelles et imaginaires, avec la synthèse de leur double coopération par synergie et antagonisme. Symbole remarquable de la génération dans son entier, comprenant, après la copulation et la pénétration des germes, l'intervention associée des parents pour élever leur engendré, intervention qui consiste en une synthèse d'influences semblables et d'influences contraires. Au point de vue biologique, cela répond à la majeure partie de l'organisme des espèces animales supérieures, chez qui les fonctions sexuelles sont reléguées

pour ainsi dire en dehors du système des organes principaux, tandis que ces organes fonctionnent à la fois comme assimilateurs et constructeurs (femelle) et comme moteurs et distributeurs (mâle).Dans le mental, c'est la grande masse du domaine représentatif où l'activité et la passivité se combinent étroitement.

***

La formule 3. 5 (3 — 5) qui donne le terme intermédiaire en 3e dimension est formée par la combinaison du produit et de la différence entre deux nombres. Or trouver deux nombres,connaissant leur somme ou leur différence et leur produit,c'est le problème général dont celui des moyennes raisons est un cas particulier (cas où le produit est égal au carré de la somme ou de la différence). Cette formule 3. 5 (3 — 5) établit le lien entre les solutions réelles et imaginaires de la moyenne raison,puisqu'elle correspond au même problème général,et l'applique aux quantités qui justement déterminent les conditions particulières des moyennes raisons.

Laissant maintenant de côté la valeur typique des nombres 3 et 5, représentons cette formule par des lettres ab $(a - b)$ pour nous attacher uniquement à l'essence de l'algorithme et en étudier les opérations. ab est le carré de la moyenne géométrique entre a et b ; $(a - b)$ est le double de la moyenne arithmétique entre a et b. Or, ces deux moyennes représentent la substitution de l'homogénéité à l'hétérogénéité de deux éléments ; la première, dans leur réunion par combinaison, la seconde dans leur réunion par agrégation. Elever à la 2e puissance la moyenne géométrique et doubler la

moyenne arithmétique, c'est conserver le résultat total de la réunion des deux éléments primitifs, au lieu de les remplacer par un seul élément participant des deux.

Le produit de deux quantités représente la combinaison de deux choses hétérogènes quant à la quantité. Cette hétérogénéité se révèle simplement par la non-identité des facteurs. Ce qui la met en évidence et en donne la mesure, c'est la différence des facteurs. Donc, multiplier le produit de deux nombres par leur différence, c'est réduire une première fois cette hétérogénéité par la combinaison des deux nombres entre eux, puis en effacer pour ainsi dire même la trace en combinant à son tour avec le produit des deux nombres l'élément même qui les rend hétérogènes.

Cette double opération exprime une tendance synthétique et unificatrice des plus remarquables. Multiplier le produit par la somme ne répondrait pas au même ordre d'idées ; car la somme, loin de mettre en évidence l'hétérogénéité des facteurs, la masque plus que le produit et la réduit moins encore. Néanmoins, l'opération ab $(a + b)$ a aussi une valeur typique. Appliquée aux nombres 3 et 5, elle donne 120, nombre qui sera le plus grand commun diviseur de tous ceux relatifs à la 4e dimension, en même temps qu'il représentera l'un des termes extrêmes. L'opération ab $(a + b)$ a donc ici pour résultat de franchir un nouveau milieu et de servir d'unité dans celui où elle a pénétré.

L'opération $ab\ (a - b) = a^2 b - a b^2$. Le second membre de cette identité rend explicite le résultat. On voit que cette combinaison à deux degrés équivaut à opposer deux combinaisons partielles, dont chacune

contient un des éléments au carré, l'autre à la première puissance, ces deux éléments échangeant les rôles entre ces deux combinaisons.

On peut voir là le symbole de deux êtres constitués par un même couple d'éléments hiérarchisés en sens inverse, l'un des deux pénétrant, par exemple, dans le plan psychique, l'autre demeurant dans le plan organique. Comme application on peut comparer deux organes entre deux espèces animales ; par exemple, d'une part, le nez qui, chez l'éléphant devient organe préhensif, et par là pénètre sur un plan supérieur d'action ; d'autre part la main qui, chez le singe ou chez l'homme, remplit le même rôle, tandis que leur nez demeure un appendice immobile, et que les pattes de l'éléphant ne servent qu'à le porter. On pourrait peut-être, dans une sphère plus élevée, comparer l'intuition et le raisonnement, facultés qui, suivant les hommes, alternent souvent l'une donnant des renseignements purement pratiques, tandis que l'autre atteint les plus hautes spéculations intellectuelles. La formule $ab\ (a - b)$ indique donc l'ascension partielle de certains êtres à essence composée qui, par deux facultés distinctes, ont accès sur deux plans d'existence.

Avec 3 et 5, cette formule montre le nombre 30 comme la résultante entre 75 et de 45, de l'individualité supérieure 5^2 combinée aux principes dans leur état élémentaire, et les principes épanouis et explicites 3^2 combinés à l'individualité élémentaire. C'est là ce que traduisent les arêtes : comme intersections des faces, elles manifestent le rôle condensateur et réducteur de l'individualité ramenée aux principes ; comme rayonnement des sommets, elles expriment l'ex-

pansion des principes combinée à l'orientation individuelle.

***

L'élément intermédiaire 30 en 3e dimension a été obtenu en multipliant le binôme (5 — 3) par 3 × 5. Pour avoir les éléments intermédiaires 720 et 1200 en 4e dimension multiplions le binôme $(5^2 - 3^2) = 4^2$ (carré du quaternaire) par 30, élément intermédiaire de la dimension précédente. On a : (A)
$(5^2-3)[3(5-3)5] = (5^2-3^2)(3.5^2-3^2 5) = 16(75-45) = 1200 - 720.$

Ce produit peut encore se former de diverses manières en rapport avec les procédés multiples par lesquels nous avons obtenu les termes extrêmes :

En (B) : (3 + 1) (5 — 1) 30, — on multiplie le terme intermédiaire par les facteurs qui, dans les termes extrêmes, proviennent des équations de la moyenne raison.

En (C) au contraire, 20 × 12 (5 — 3), on multiplie les termes extrêmes par le facteur qui, dans le terme intermédiaire, provient des équations de la moyenne raison.

En (D) : $5^2(3^2+3)(3+1) - 3(5^2-5)(5-1) = 25 \times 12 \times 4 = 9 \times 20 \times 4$. Les sommets de la 3e dimension sont combinés au carré du principe opposé et au quaternaire élémentaire.

En (E) : 10 × 24 (5 — 3) = 240 (5 — 3), on se sert de l'un des facteurs qui interviennent dans les termes extrêmes en 4e dimension (suivant la 1re loi étudiée).

Cette dernière formule est fort intéressante en ce qu'elle montre les termes intermédiaires comme la combinaison des deux principes polaires 3 et 5, tous deux avec la combi-

naison des deux formes par sommation (10) et par reproduction (24) du principe quaternaire. Cette combinaison apparaît ici comme la suite de la combinaison en 3e dimension des deux principes polaires 3 et 5, qui tendent l'un et l'autre vers une résultante quaternaire. Ici, cette résultante se manifeste comme norme appliquée à la sommation et à la reproduction à la fois et à leur union synthétique. L'action associée représentée par (3—5) est demeurée la même, sauf qu'elle va maintenir distincts, au lieu de les fondre, les deux produits partiels que son intervention réalisera ; l'action commune, la copulation fécondatrice seule a évolué ; elle ne s'accomplit plus avec les principes radicaux, mais avec les deux modes d'application de leur résultante commune. Cette relation est suggestive d'une copulation supérieure et mystérieuse accomplie sous l'influence cruciale du quaternaire, de la résultante de l'universel et de l'individuel, du mâle et de la femelle qui accouple à son tour deux modes d'action, l'un de discontinuité et de superposition, l'autre de continuité hétérogène et de combinaison.

Dans tout ce processus, le nombre 30, relatif aux arêtes en 3e dimension, apparaît comme le résidu de deux constructions superposées qui s'annulent partiellement, l'une par rayonnement autour d'un sommet, l'autre par intersections de plan.

En 4e dimension, les deux produits partiels du binôme (5 — 3) demeurent distincts. En effet, les arêtes résultent toujours du rayonnement des sommets ; mais les éléments-enveloppes sont ici des volumes, et leurs intersections ne sont plus des arêtes, mais des faces. Pour cette raison même, le processus ne peut plus se poursuivre dans

la 5e dimension, car les deux opérations : rayonnement autour des sommets et intersections d'éléments enveloppes donneraient : l'une des arêtes, l'autre des volumes. Or il n'y a que deux produits partiels possibles avec le binôme (3 — 5) et aucun terme ne correspond plus aux faces, élément nécessaire pour relier les arêtes et les volumes. Une telle forme à 5 dimensions se conçoit comme un filet enveloppant une masse qui peut saillir ou s'enfoncer entre les mailles d'une manière indéterminée.

CHAPITRE IV

Les Nombres dans les formes régulières des quatre premières dimensions

Le dodécaèdre et l'icosaèdre, par leur origine dans la moyenne raison et leur lien avec l'individualisation sont les prototypes de la finalité définie ; ils montrent la tendance de l'être à chercher la réalisation la plus parfaite de sa propre nature ; ils dévoilent dans le quaternaire cosmique la neutralisation qui résout l'antinomie des Principes universels avec la Réalisation individuelle.

Les polyèdres et les formes régulières, mieux que toutes autres, manifestent en mode spatial la combinaison de l'universel et de l'individuel. Ils ont une homogénéité due à l'égalité des éléments, cette homogénéité n'est que relative et composée par des éléments distincts hiérarchisés, subdivisés.

La relation de ces formes avec les intervalles musicaux confirme encore le caractère de finalité et de limitation manifestée par les suites de l'icosaèdre et du dodécaèdre.—En effet, 12, 30, 20 sont les rapports vibratoires de l'accord parfait majeur dans son ordre genétique, la

quinte étant inférieure à la tierce. C'est ut_1 mi_2 sol_1. — 120, 720, 1200, 600 (soit 1, 6, 10, 5) ; c'est encore l'accord parfait majeur avec doublement de la tierce et refoulement de la tonique à l'octave inférieure. C'est ut_1 sol mi_3 mi_2, position plus ouverte qu'en 3e dimension mais présentant un mouvement de retour de la tierce vers la tonique. Les séries tétraédrique, hexaédrique, octaédrique (dans les premières dimensions) ne font que présenter des rapports de quinte ; la tierce n'y apparaît pas. Or les quintes empêchent toute fixation de tonalité et tendent vers une progression indéfinie. La tierce, au contraire, établit immédiatement une tonalité et un mode ; elle caractérise un type défini.

Le Quaternaire et l'Individualisation

Les formules relatives à la 3e dimension convergent autour du quaternaire. Le terme moyen (arêtes) y est manifesté par la relation directe de 3 et de 5 sous forme de produit et en même temps sous forme de différence ; 4 n'y apparaît pas ; mais il est la moyenne arithmétique de la différence (3 — 5) (qui est précisément égale à la racine de 4) et le centre autour duquel gravite cette construction.

La structure des termes extrêmes (sommets et faces) donne encore 4 comme facteur commun, et le montre constitué au moyen du 3 et du 5 provenant du produit des racines des équations de la moyenne raison. Cette double convergence du ternaire et du quinaire vers le quaternaire est du plus haut intérêt, et ainsi l'icosaèdre et le dodécaèdre apparaissent comme des pantacles d'une loi profonde et hautement métaphysique.

Le 4 obtenu par (5 — 1) répond à la synthèse des deux solutions réelles de la moyenne et extrême raison. Or, nous l'avons vu, l'expression métaphysique de cet algorithme est *l'équivalence synthétique et pleinement unifiée de la différenciation spéciale à un individu.* La solution par défaut exprime un élagage de tout ce qui excède la portion de l'être susceptible d'unification parfaite et typique ; la solution par excès exprime l'accession du complément nécessaire pour que l'être réalise pleinement le type intégral dont il n'est qu'un fragment. Le quaternaire apparaît donc ainsi comme la résultante de ces deux tendances éliminatrices de l'accident dans la substance.

Or le nombre 5 et la lettre hébraïque ה (*hé*), qui lui correspond, ont été considérés par les anciens comme le nombre et la lettre de la Vie.

Ce caractère ressort de l'influence du nombre 5 au sein du quaternaire dimensionnel, de la polarisation spatiale ; l'accession d'une 5e unité détermine une orientation choisie, l'individualisation, la direction définie, au sein de l'universalité ordonnée et fixée par le quaternaire. C'est la vie au milieu des 4 éléments.

Les formations cristallines, qui correspondent aux distributions de la matière dans un milieu stable, peuvent toutes être ramenées à des altérations de la forme cubique ou à des troncatures de la forme octaédrique, formes typiques du quaternaire dimensionnel basé sur les contrastes maximum simultanés. Au contraire, la forme tétraédrique, qui ne se rencontre que dans des cas d'hémiédrie, et les formes dodécaédriques et icosaédriques ne sont qu'approchées. Par contre, ainsi que l'a remarqué M. de Lapparent, la symétrie quinaire, qui fait

complètement défaut aux cristaux, est très abondante chez les végétaux et chez les animaux.

Constatons en outre le voisinage de l'expression $\sqrt{5}\,(\sqrt{5} - 1) = 2{,}72393$ et du nombre transcendant $e = 2{,}71828$, qui exprime, ainsi que nous le verrons, le principe du développement de la vie. 5 représente particulièrement la vie réalisée dans l'univers par l'individualisation.

Individualiser, c'est particulariser, et toute particularisation introduit toujours quelque peu l'accidentel. Le type pur n'est qu'un idéal, jamais réalisé par l'individuel. L'algorithme de moyenne et extrême raison tend à rétablir l'équilibre et à conserver le type idéal à travers l'expansion individuelle. Il donne la formule mathématique d'un principe qui domine toute l'évolution des espèces organiques et inorganiques, principe dont la loi approchée et relative des proportions définies en chimie est un cas particulier, principe en vertu duquel les variations spécifiques des animaux et des végétaux sont limitées, et qui, sans contredire en rien l'origine commune des espèces et leur plasticité originaire tend à différencier des espèces séparées, et à les fixer, assigne des limites aux écarts morphologiques autour du type, restreint la fécondité des métis, établit la corrélation des organes et des fonctions, etc.

Or le développement de ce principe répond au nombre 4 dans le domaine où toutes les quantités sont réalisées, et où on a dépassé la région des virtualités, marquées par les racines et les nombres incommensurables.

*
* *

4 obtenu par (3 + 1) répond à la synthèse des deux solutions imaginaires de la moyenne et extrême raison. Ici, la quantité à partager est négative ; elle n'est pas un carré véritable, mais le produit d'une somme par une différence. Son origine ne vient pas d'un principe d'existence potentialisé et que fait éclore son germe. Cette quantité est, au contraire, une résultante de neutralisation partielle, qui consiste à accroître l'élément commun (partie réelle) de l'apport des deux éléments opposés (parties imaginaires conjuguées). Ceci nous révèle toute une catégorie d'existence qui doivent provenir, non plus d'un principe interne et propre de développement, mais de la neutralisation de tendances idéales, se réduisant et se projetant dans l'ordre réel pour s'y réaliser dans la mesure du possible. Les solutions imaginaires sont ainsi la représentation plus ou moins réduite de types idéaux dont la réalisation parfaite déborde les possibilités ouvertes par le champ d'existence considéré. Les individualités de ce champ ne sont alors que des abstractions d'un mode d'existence plus concret. A ce groupe se rattache peut-être nombre d'espèces minérales, organiques et psychiques.

Il est parfaitement possible que la difficulté de tirer au clair la genèse des espèces, et les désaccords sur cette question tiennent à l'impossibilité d'assigner une même genèse à toutes les espèces : les unes provenant des énergies propres de notre sphère terrestre, dont elles manifestent le développement normal, les autres résultant d'un conflit et d'une combinaison de forces qui viennent d'ailleurs. On se trouve en présence de deux modes de réalisation différents, l'un par développement d'une force intérieure, l'autre par neutralisation de

forces extérieures ; et il semble que bien des controverses scientifiques s'éclairciraient, si, au lieu de vouloir ramener la production des choses exclusivement à l'un ou à l'autre de ces principes, on admettait leur coexistence. Il doit y avoir en outre certains êtres qui sont le fruit de la combinaison de ces deux principes, et il est probable que la majorité des types très différenciés et très complexes rentre dans cette catégorie Cela expliquerait en partie les difficultés qu'on éprouve à établir les origines et à donner des définitions rationnelles.

Les solutions imaginaires de la moyenne raison sont en même temps les racines cubiques imaginaires de l'unité ; et par là se manifeste la concordance du monde des idées avec le ternaire. La racine imagninaire de 3 apparaît dans ces formules comme exprimant la source du mode universel. Les solutions imaginaires de la moyenne et extrême raison semblent donc exprimer les cas où un type donné n'est pas complètement réalisable en modes individuels dans la sphère d'existence considérée, mais fournit seulement des applications particulières et symboliques d'un principe universel.

***

Le partage en moyenne et extrême raison donne encore une concordance des plus remarquables. Cherchons deux nombres tels que leur produit, leur différence, la différence de leurs carrés (ou, ce qui revient au même, le produit de leur somme par leur différence), soient trois quantités égales. Ces deux nombres sont les deux parties de l'unité, divisée en moyenne et extrême raison (solutions réelles). En effet, soit x et y, ces 2 nom-

bres. Il faut que leurs valeurs satisfassent aux égalités suivantes :

$$x\,y = x - y = x^2 - y^2 = (x + y)\,(x - y).$$

Divisons par $x - y$ l'équation $x - y = (x + y)\,(x - y)$, on obtient $(x + y) = 1$, d'où $y = 1 - x$.

Substituant cette valeur dans l'équation $x - y = x\,y$, on a $x - 1 + x = x\,(1 - x)$, d'où $2\,x - 1 = x - x^2$ et $x^2 + x - 1 = 0$, ce qui est l'équation de la moyenne raison.

Ainsi, ce partage remarquable, opéré au sein de l'individu, crée l'égalité de valeur entre trois relations très importantes qu'offrent deux quantités. N'est-ce pas là le signe de l'épuration et de l'équilibre le plus parfait sous lequel puisse se présenter un être soumis à l'empire de la quantité. $x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}\; y = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$

Le résultat commun aux 3 opérations est $-2 + \sqrt{5}$.

Cherchons maintenant les nombres satisfaisant aux mêmes concordances, sauf la substitution de la somme à la différence (1), de telle sorte que l'on ait $x\,y = x + y = x^2 - y^2 = (x + y)\,(x - y)$.

Les solutions sont les mêmes, sauf les changements de signe et la substitution de x à y. On a alors $y = (x - 1)$ et l'équation $x^2 - 3\,x + 1 = 0$, d'où $x = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - 1} = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$, et $y = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$. Le résultat commun aux 3 opérations est alors $2 \pm \sqrt{5}$.

---

(1) Ce problème intéressant est traité par de Montferrier. (Encyclopédie mathématique, T. II.)

Ainsi, ces deux problèmes donnent pour solutions les deux parties de l'unité divisée en moyenne et extrême raison. La quantité $\frac{-3+\sqrt{5}}{2} = 2\,(\sin. 9^\circ + \cos. 9^\circ)$ (corde et apothème de l'angle inscrit du pentagone étoilé ; la quantité $\frac{-3-\sqrt{5}}{2} = 2\,(\sin. 27^\circ - \cos. 27^\circ)$ (corde et apothème du ½ angle inscrit du pentagone convexe).

Le second problème substitue une relation de somme à une relation de différence, et il se résout encore par la moyenne et extrême raison en renversant simplement le rôle des termes. La réunion de ces deux problèmes montre la connexion de la moyenne raison avec la libration d'un nombre entre les deux nombres entiers voisins. Cette double libration intervient dans toute la genèse des formes des suites icosaédriques et dodécaédriques. Nous en étudierons tout à l'heure l'essence.

Remarquons auparavant les quantités $\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)$, $\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)$ représentant le segment complémentaire de l'extrême raison. Le produit des numérateurs donne $3^2 - 5 = 4$. et découvre une nouvelle genèse du quaternaire. Il est obtenu ici comme résidu de l'extraction du principe de vie individualisée, tirée de l'épanouissement des Principes ($3^2 = 9$) exprimé par le Chœur des anges. La nature quaternaire et l'individualité dont l'homme est le prototype apparaissent ainsi comme les deux parties complémentaires incluses dans l'épanouissement céleste du ternaire. Le Chœur angélique semble

se révêler comme la réunion de la nature et de la vie, entrelacés mais non fondus ensemble.

L'expression $3^2 - 5 = (3 + \sqrt{5})(3 - \sqrt{5})$ montre comment s'opère cette extraction du quaternaire. Les 2 facteurs représentent le germe de l'individualité $\sqrt{5}$, se liant (+) et se séparant (—) des principes, le premier exprimant la tendance à l'objectivité. le second la tendance à la subjectivité. Le quaternaire résulte ici de la synthèse de ces deux librations, et se manifeste comme un résidu dans le monde archétype, irradié du ternaire dont on a extrait l'individualité.

Cette relation trouve dans la géométrie une représentation très suggestive. Divisons un carré en 9 petits carrés égaux. Enlevons les 4 carrés des angles (fig. 1) : une croix grecque reste constituée avec 5 carrés juxtaposés par le côté. Enlevons encore le carré central (fig. 2):

Fig. 1

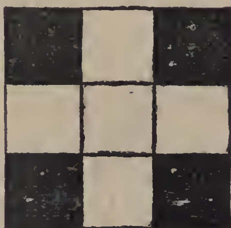


Fig. 2



ce sont à leur tour les 5 carrés enlevés qui donnent une croix grecque, mais ici l'orientation est inclinée à 45°, et les carrés s'opposent par les sommets. Ces deux formes de la croix se rencontrent dans l'art de toutes les époques. On voit les symboles profonds cachés sous ces

figures enfantines et les différences de conditions auxquelles doivent répondre ces deux croix : l'une, droite, pleine de cohésion, ayant 12 angles dont 4 rentrants, l'autre, à direction oblique, reliée seulement par les axes et présentant 20 angles dont 8 rentrants.

Le processus complémentaire de l'opération 3 — 5 consisterait dans l'extraction du quaternaire, soit $3^2 - 4 = 5$, qui peut s'écrire $3^2 - 2^2 = (3 + 2)(3 - 2) = 5 \times 1 = 5$. Ici, l'individualité et l'unité sont mises en évidence comme les deux pôles opposés entre lesquels oscille le ternaire.

La contre-partie de ces opérations donne $3^2 + 2^2 = 13$, et fait apparaître le nombre qui, dans le Tarot, exprime la mort ou plutôt la transmigration, et l'émancipation du cycle duodénaire. Ici, 13 apparaît comme le quaternaire juxtaposé extérieurement au monde archétype et s'y accolant comme un appendice. Cette opération implique des racines imaginaires.

Il en serait de même pour l'opération $3^2 + 5 = 14$ par $(3 + \sqrt{-5})(3 - \sqrt{-5})$ et amenant le double septenaire.

La Décade

La série des facteurs qui permet d'obtenir les sommets des formes à 3 et 4 dimensions manifeste une loi évidente. Mais il faut découvrir comment elle se développe.

Le nombre 10 sous la forme $3^2 + 1$ est le produit des facteurs$(3 \pm \sqrt{-1})$, qui sont les racines de l'équation $x^2 - 6x - 10 = 0$. Dans cette équation, 6 représente (changé de signe) la somme des racines. Les deux nombres 6 et 10 répondent l'un à la section méri-

dienne, l'autre à la section équatoriale de l'icosaèdre. 6 est le 3e des nombres sommes ; 10 est le 3e des nombres triangulaires, et l'on voit le rapport de ce nombre avec une genèse tétraédrique.

La quantité complexe $(3 \pm \sqrt{-1})$ est ici la contre-partie de celle qui nous a donné le facteur 4 pour la 3e dimension au moyen des racines imaginaires $(1 \pm \sqrt{-3})$ de l'équation de la moyenne raison. On passe de l'expression $(1 \pm \sqrt{-3})$ à l'expression $(3 \pm \sqrt{-1})$ en échangeant les valeurs numériques de leurs 2 éléments. L'expression $(1 \pm \sqrt{-3})$ indiquait un élément réel ajouté à trois éléments imaginaires ; ici, c'est trois éléments réels combinés à un élément imaginaire. Comme le terme réel doit répondre à un élément appartenant à une certaine dimension et le terme imaginaire à une autre dimension, chacune des racines $(3 \pm \sqrt{-1})$ exprime une rotation à angle droit par rapport à la face triangulaire de l'icosaèdre ; elle indique un tétraèdre dont le 4e sommet est dans la 4e dimension. Le double signe du radical $(\pm \sqrt{-1})$ montre que ce processus se réalise des deux côtés de la 3e dimension, comme dans la série octaédrique.

10 apparaît ici comme un renversement de 4 par échange à la fois de la partie imaginaire avec la partie réelle de la 1re puissance avec la puissance ½ (racine carrée). L'expression $(1 \pm \sqrt{-3})$ révèle une unité à racines multiples plongeant dans le virtuel : l'expression $(3 \pm \sqrt{-1})$, une triplicité réelle à racine virtuelle unique.

La contre-partie manifestée par ces expressions paraît indiquer que l'algorithme est ainsi complètement épuisé, et leur application aux formes régulières expli-

quer que la suite de l'icosaèdre est close avec le 600-péroïde. La forme à 4 dimensions apparaît ici comme un épanouissement ; celle à 3 dimensions comme une condensation, et toutes deux se font équilibre, comme les deux temps d'une vibration. C'est peut-être la cristallisation géométrique de la relation qui existe entre les corps et les forces physiques : les corps atomiques correspondent aux phases condensatrices ; les forces : lumière, électricité, chaleur, son, etc., aux phases expansives des vibrations profondes de la vie du kosmos.

***

Le processus qui fournit les 4 et 10 par $(3+1).(3^2+1)$ pourrait s'envisager, non plus comme contre-partie de deux expressions radicales. mais comme termes d'une série qui donnerait les sommets de la suite icosaédrique. On aurait alors :

$3\,(3+1) = 4 \times 3 = 12 = 3^2 + 3.$
$3\,(3+1)\,(3^2+1) = 4 \times 3 \times 10 = 120 = 3^4 + 3^3 + 3^2 + 3.$

Le terme suivant pourrait être $(3^3+1) = 28 = 4 \times 7$ donnant pour la 5e dimension 3.360 sommets. Mais ce nombre n'est plus égal à la somme des puissances consécutives de 3. Pour obtenir la continuation de cette loi, il faut dans les nouveaux facteurs faire croître les exposants de 3 suivant les puissances de 2. Alors, pour, la 5e dimension, ce sera le facteur (3^4+1) et non (3^3+1) qui fera suite à $(3+1)$. Cela donne 9.840 sommets avec $3\,(3+1\,(3^2+1\,(3^4+1) = 120+82 =$

$$3^8+3^7+3^6+3^5+3^4+3^3+3^2+3.$$

Or, le nombre 82 est le produit des racines de l'équation $x^2 - 2 \times 3^2 x + (3^4 + 1) = 0$ racines qui sont $(3^2 + \sqrt{-1}.)$

Il est fort probable que cette série illimitée correspond à des manifestations géométriques dans les dimensions supérieures à la 4e, qui consistent sans doute en distributions de points régulièrement espacés, mais cessant d'être équidistants des formes sphériques correspondant à leur ordre dimensionnel.

***

Le 120-édroïde procède aussi du quaternaire ; il hérite de 4 dans 12 et 20; pour les sommets, le nouveau facteur intervenant est 10. Nous voilà donc conduit à la relation, jugée si importante par les pythagoriciens, entre la tétrade et la décade. Or nous avons obtenu ce nombre 10 en renversant les radicaux et les imaginaires, par la transformation de $(1 \pm \sqrt{-3})$ en $(3 \pm \sqrt{-1})$.

Dans la 1re formule, l'unité est réelle, manifeste, c'est l'individualisation effective ; elle s'adjoint ou s'oppose le ternaire des principes sous forme de potentialité virtuelle, irréalisée, non éclose, en germe. Dans la 2e, la réalisation est triple, l'unité est virtuelle : c'est le renversement de la réalisation transportée de l'individuel à l'universel qui se trouve réalisé explicitement. On entrevoit quels mystères profonds transpercent à travers les hiéroglyphes inconscients que nous en traçons par les formules mathématiques. On pressent là certaines lumières cachées, relativement à la Trinité des personnes divines et à l'Unité de substance et d'essence ; et il est très curieux de voir que c'est par la combinaison de

la somme par la différence de ces deux polarités interverties que l'on obtient dans un cas le quaternaire, dans l'autre, la décade, qui est considérée dans l'ésotérisme comme la plénitude de l'être dont l'état quaternaire représente la réalisation élémentaire.

Cette genèse du nombre 10 est plus soudaine, plus directe que celle qui procède par addition des 4 premiers nombres. Ce dernier procédé paraît être l'imitation imparfaite par la superposition et l'agglomération matérielle d'une projection immédiate et spirituelle. Ce serait au mode de retournement des racines et de la caractéristique imaginaire que se rattacherait plutôt la formation des 120 sommets du 120-édroïde. Cela expliquerait l'achèvemcnt du processus avec les 120 sommets du 600-édroïde et dans la 4e dimension, tandis qu'en considérant 10 comme la somme des 4 premiers nombres, on pourrait continuer.

Trente, et la libration individuelle

La formation des 600 sommets du 120 édroïde par 20×30, soit par $(5^2 - 5)\,(5^2 + 5)$ est la continuation du processus $(5 - \sqrt{5})\,(5 + \sqrt{5}) = 20$, qui est celui des pentagones inscrits, et qui se rattache à la moyenne raison réciproque. Le facteur 30 proviendra alors de l'introduction de la caractéristique imaginaire appliquée à l'un des deux termes des parenthèses, mais plus vraisemblablement au radical. En effet, les expressions $(5\sqrt{-1} \pm \sqrt{5})$ ne peuvent s'obtenir sans faire appel à une intervention étrangère à l'algorithme, car si 5 et $\sqrt{5}$ ont même origine, la racine réelle de 5 ne

peut donner un carré imaginaire. Il est donc plus normal d'affecter la caractéristique imaginaire au terme de puissance inférieure. On aura alors les expressions $(5 \pm \sqrt{-5})$, qui sont les racines de l'équation $x^2 - 10x + 30 = 0$.

Les expressions de la forme $(5 \pm \sqrt{5})$, $(5^2 \pm 5)$, etc. expriment la somme et la différence d'une quantité avec sa racine. Elles traduisent l'oscillation entre une individualité et sa racine carrée, entre un degré d'être et le degré immédiatement inférieur qui lui a servi de germe. Elles manifestent la tendance d'un être à s'adjoindre son germe ou à l'extraire de soi pour s'en alléger.

Ces expressions peuvent être mises sous la forme $\sqrt{5}(\sqrt{5} \pm 1)$, $5\ (5 \pm 1)$, etc. Cela met en évidence le germe et indique l'opération avant son accomplissement. L'expression apparaît alors comme l'opération (par nombre entier) la plus voisine de l'élévation au carré. C'est la moyenne proportionnelle entre deux quantités voisines. Si donc on considère les nombres entiers (ce qu'ils sont en effet) comme les points d'arrêts naturels sur lesquels une évolution tend à se reposer, on voit que les produits de deux nombres consécutifs représentent encore les combinaisons de facteurs différents les plus voisines de la graduation. Et comme, pour un produit constant, la somme des facteurs est minimum quand les facteurs sont égaux, le cas envisagé ici représente le résultat le plus approché de la graduation avec le minimum de quantité employée. On voit encore que la graduation, par rapport à la sommation (pour les nombres plus grands que l'unité), substitue de l'énergie opératoire à l'intensité des matériaux employés.

Ainsi, les produits de deux nombres voisins répondent à une finalité du même genre que la moyenne et extrême raison. La moyenne et extrême raison représente la moyenne géométrique tirée du sein de l'être lui-même. Ici, la moyenne géométrique est tirée de la relation de l'être avec ce qui lui tient de plus près, son germe. On voit de plus que les quantités de la forme $a^2 \pm a$ représentent une moitié (non comme quantité, mais comme composition d'éléments) de l'équation $a^2 \pm ax - x^2$ de la moyenne et extrême raison, équation qui manifeste la symétrie la plus pure entre deux quantités formant une équation du second degré.

Les quantités de la forme $a \pm \sqrt{a}$ sont ainsi comme l'un des deux bras du levier, dont l'équation de la moyenne et extrême raison traduit l'équilibre. Or, comme la moyenne et extrême raison, dans sa forme réelle, est liée à $\sqrt{5}$, il n'est pas étonnant que ce soit à propos du nombre 5 que nous trouvions developpé l'algorithme de la forme $a \pm \sqrt{a}$ (ou plus généralement) $(a^{2n} \pm a^n)$.

Le produit des deux formes $(a^2 + \sqrt{a})$ $(a^2 - \sqrt{a}) = a^2 - a$ figure dans la suite dodécaédrique des sommets. De cette combinaison sortent les nombres 20 et 30 qui représentent les oscillations minimum par excès et par défaut autour du carré de 5, quand ce nombre est regardé comme unité indivisible. Or c'est bien là le caractère de l'individualité, qui s'unifie le plus qu'elle peut en s'élevant. — La combinaison des deux librations par excès et par défaut montre donc l'oscillation minimum produite par l'être autour de sa finalité réprésentée par son élévation au carré. C'est la differenciation minimum imposée par le

nouveau milieu dans lequel il pénètre. Ici, il n'oscille plus entre ses deux moyennes raisons, qui représentent les deux type: entre lesquels tout individu est suspendu. C'est entre son germe et lui-même que se produit la libration. Le germe figure dans l'expression positive comme le cordon ombilical auquel l'individu est supendu ; dans l'expression négative, comme l'ombilic cicatrisé laissant une dépression au sein de l'individu.— Ce symbolisme ne doit pas être limité au corps organique ; il doit s'étendre à toutes les enceintes individuelles relatives aux fonctions psychiques, ethniques, individuelles, et, en particulier, à toute la sensibilité, qui fonctionne tantôt passivement en soumettant l'individu à l'empreinte des agents extérieurs, tantôt activement comme l'apport dynamique qui étend l'empire de l'individu sur le monde extérieur.

***

Mais les mathématiques révèlent encore une loi métaphysique en montrant que le produit des deux oscillations autour du type, exprimées par $(a + \sqrt{a})(a - \sqrt{a})$ donne un produit moindre que l'élévation pure et simple au carré. C'est l'application du théorème démontrant que le produit de plusieurs quantités à somme constante est maximum quand elles sont égales.

Pour obtenir des quantités de la forme $(5 + \sqrt{5})$, $(5^2 + 5)$, etc., il faut faire appel aux racines imaginaires. De plus, comme les quantités de la forme $(5^2 - 5)$, $(5^4 - 5^2)$ résultent des produits $(5 + \sqrt{5})$ $(5 - \sqrt{5})$, $(5^2 + 5)$ $(5^2 - 5)$, le facteur positif, celui de la libration additive à l'individu, a pour

provenance des racines imaginaires; et c'est par les racines imaginaires que la moyenne et extrême raison a formé le quaternaire au moyen des racines de 3. — Donc, la libration de l'individu en dehors de lui-même, (celle par laquelle il s'ajoute à son germe), met en lumière, comme on pouvait s'y attendre, l'ingérence de forces n'émanant pas de l'individu, mais puisées au dehors. Là se manifeste la condensation, dans le réel, des virtualités, et pour ainsi dire des désirs, qui ont provoqué la génération.

Ici est écrit ce principe que, pour effectuer l'évolution qui donne accès sur un plan supérieur, l'individu ne peut pas se contenter de ses forces propres, mais qu'il doit se rattacher à ses progéniteurs et se servir de leur aide. L'oubli de cette loi est cause de l'échec des révolutions, toutes amenées par une aspiration normale et raisonnable, mais viciées par leur rupture avec les éléments traditionnels et par la présomption à tirer des seules ressources des individus les énergies nécessaires pour réaliser les fins de l'humanité. C'est encore l'oubli de cette loi qui jette les explications évolutionnistes dans d'inextricables difficultés, en leur faisant rejeter l'élément involutif indispensable pour équilibrer l'évolution et la rendre effective. C'est ce facteur idéal, virtuel, irréel par rapport au plan physique, mais existant et agissant, qui rend efficace la finalité impliquée dans toute évolution pour l'orienter, finalité à laquelle les transformistes refusent toute existence, bien qu'ils l'invoquent sans cesse d'une manière plus ou moins détournée pour expliquer la sélection et le progrès.

Ce complément dont l'origine est exprimée mathématiquement par les quantités imaginaires est l'idéal

conçu inévitablement, par réaction du retranchement imposé à l'individu dans son adaptation à des condition données. Par le seul fait que l'être tel qu'il est n'est pas complet, et qu'il sent, d'une manière plus ou moins consciente, une aspiration vers un état défini qui doit le saturer, on ne peut refuser l'existence effective à ce complément dans un autre milieu.

Si les types n'avaient d'existence que dans les réalisations individuelles définies par les circonstances, le désir, l'aspiration, le besoin d'un autre état serait inconcevable; les êtres seraient parfaits tels qu'ils sont, et le mal serait une notion inintelligible. D'autre part, si le type pur capable de satisfaire pleinement les individualités n'existait pas en soi, et si, nulle part n'existait le complément des individualités plus ou moins tronquées, comment s'expliquer l'orientation du désir, l'instinct et l'affinité ? Il y aurait des changements perpétuels s'annulant sans cesse et de perpétuels et stériles recommencements : c'est là le chaos. Expliquer le progrès de l'évolution par des hasards heureux, par les rencontres exceptionnelles et purement fortuites des conditions convenables, c'est simplement reculer la difficulté ; car il faut expliquer alors pourquoi certains concours de circonstances jouissent du privilège d'amener le progrès. On reporte la sélection dans le milieu pour l'expliquer dans les individus, mais le problème reste le même. Il est insoluble si l'on rejette toute finalité ; et cette finalité n'est possible que si la fin préexiste, en quelque manière, à son accomplissement par l'être qui doit y parvenir.

***

L'algorithme de la moyenne et extrême raison nous montre l'individu se créant deux pôles, l'un d'intériorisation, l'autre d'extériorisation, qui tous deux expriment les conditions les plus pures de son type.

L'algorithme des produits d'un nombre avec les deux nombres voisins indique une indépendance moins grande, une adaptation avec le voisinage, la formation de deux zones, l'une en dedans, l'autre en dehors des limites de l'être et ayant pour bornes les arrêts normaux marqués par les nombres entiers voisins.

Les librations positives proviennent forcément de facteurs ayant, l'un des éléments imaginaires, l'autre réels des éléments. L'imaginaire affectée au terme de plus basse puissance, exprimerait la relation entre un germe virtuel et une éclosion réelle. Affectée au terme de plus haute puissance, elle indiquera une relation entre un germe réel et une éclosion virtuelle. Mais, en ce cas, la caractéristique imaginaire ne peut provenir que d'un coefficient d'origine indépendante, et par là s'affirme la nécessité d'une inspiration pour toute production idéale par la nature, et l'impossibilité de passer par le seul développement physique à la genèse de l'idée.

Le processus de ces expressions imaginaires est forcément limité, car la caractéristique imaginaire doit disparaître avec le carré de $\sqrt{-5}$. Par conséquent, le facteur (5^2+5) sera le terme le plus élevé de la série, et cela correspond au produit $(5^2-5)(5^2+5)=5^4-5^2$ $=600$, nombre des sommets du 120-édroïde.

Faut-il inférer de là qu'il existe seulement 4 degrés hiérarchiques possibles dans les conditions d'existence individuelle et centralisatrice dont les formes régulières

donnent le schéma abstrait ? Ce schéma est vraisemblablement la manifestation élémentaire des possibilités ouvertes à la vie physique, puisqu'il correspond aux propriétés de l'espace qui figurent parmi les conditions fondamentales de cette vie. Ces 4 degrés répondent peut-être aux 4 règnes : minéral, végétal, animal et hominal.

***

On peut former 30 sans recourir immédiatement à des racines imaginaires de 5 en le construisant par (5 + 1). Alors, c'est 6 qui apparaît comme formé par une quantité imaginaire qui peut être $\sqrt{-1}$, laissant 5 demeurer réel. Cette forme répond assez à la distribution des sommets de l'icosaèdre formant deux pyramides à base pentagonale. A ce titre, il formerait la contrepartie de 20 formé par 5 (5 — 1), c'est-à-dire au moyen des racines de la moyenne et extrême raison.

Les facteurs (5 + 1), (5 — 1) manifesteraient alors la libration opérée entre l'individu et l'unité immédiatement voisine. Or, cet algorithme va se limiter immédiatement du côté positif. On peut avoir $(5^2 - 1) = 24$, mais non $(5^2 + 1) = 26$, car la caractéristique imaginaire, ayant disparu avec le carré de $\sqrt{-1}$, ne peut plus reparaître dans les puissances paires de cette quantité. Le nombre $(5^2 + 1) = 26$ n'a aucune application dans la genèse des formes régulières. Par contre, c'est le nombre que la kabbale assigne au Tétragramme, mais elle le forme alors par 10 + 5 + 6 + 5. Notons cependant que la forme $(5^2 + 1) = 26$ est pour le 5 l'analogue de $(3^2 + 1) = 10$ pour le 3 : il exprime peut-être, par rapport au principe de vie individuelle souveraine, la manifestation absolue et complète.

Vingt-quatre et l'Harmonie

La formation des 600 sommets du 120-édroïde par 24 × 5, soit par 5^2 (5^2 — 1), est la continuation du processus 5 (5 — 1), qui est celui des moyennes raisons en fonction d'une unité intermédiaire, et qui procède de décagones inscrits. Le facteur 24 = (5^2 — 1) peut se concevoir suivant la loi précédemment observée comme produit de la somme par la différence (5 ± 1), soit 4 × 6. Cette expression donne les racines de l'équation $y^2 - 10\,y + 24 = 0$, équation remarquable par le lien qui existe entre ses coefficients : 10, somme des racines est la somme des 4 premiers nombres ; 24, produit des racines, est le produit des 4 premiers nombres.

Cette équation ne donne pas une moyenne raison, mais quelque chose qui en est parent. On n'y extrait pas le carré parfait d'une individualité ; on extrait le carré du lien existant entre la sommation et la reproduction des 4 premiers nombres, et le quaternaire apparaît ici, non comme le résultat, mais comme le substratum de l'opération. Ici, la sommation et la reproduction des mêmes 4 premiers nombres jouent respectivement les rôles que jouaient la première et la 2e puissance de 2 dans la moyenne raison.

Or la sommation, c'est l'agrégation, la juxtaposition ; la reproduction, c'est la combinaison, la génération par sexualité, etc. et l'on conçoit que ce dernier mode représente un degré hiérarchique plus élevé que le premier. L'algorithme reproduction est en effet une sommation perfectionnée, simplifiée : il substitue un

acte différencié et qualifié unique à une répétition d'actes identiques. Et de même, la génération sexuelle est une abréviation de la reproduction par bourgeonnement.

L'ensemble des deux facteurs 24 = (5^2—1), et 10 = (3^2 + 1), qui interviennent en 4e dimension, montre, par rapport aux secondes puissances de 5 et de 3, une libration divergente, tandis que les deux facteurs 4 = (5 — 1), 4 = (3 + 1) qui interviennent en 3e dimension, faisaient converger le 5 et le 3. La 4e dimension représente ainsi une libration en sens inverse de celle opérée en 3e dimension. En 3e dimension, le quaternaire apparaît comme le point de concours du ternaire et de quinaire, comme l'union des principes universels avec la détermination individuelle au moyen de l'équilibre kosmique. En 4e dimension, le carré de 3 et le carré de 5 s'éloignent l'un de l'autre, et leur libration jusqu'à l'unité voisine réalise le quaternaire sous le mode nouveau que nous venons de voir. Ce n'est plus le quaternaire élémentaire du nombre 4, mais la synthèse hiérarchique des 4 degrés, d'une part superposés en sommation, d'autre part combinés en graduation. Ici, l'identification entre le 3 et le 5 s'opère encore, non plus dans le résultat, mais dans la norme appliquée aux deux seuls modes de génération de la quantité qui unissent des éléments hétérogènes. (La graduation demeure en dehors, comme opérant sur une base unique.)

***

Ainsi, les deux principes du ternaire et du quinaire parachèvent ici le cycle quaternaire en le réalisant

par expansion et divergence, et dans son épanouissement le plus complet. Le facteur 10 × 24, multiplié d'une part par 3, de l'autre par 5, donne les éléments intermédiaires (arêtes, faces) des formes à 4 dimensions. Isolément, le 10 et le 24 interviennent chacun dans l'un des éléments extrêmes. 24 est, nous l'avons déjà vu, la synthèse de toutes les combinaisons de contrastes successifs et simultanés sous les formes 4 × 6 et 3 × 8. Le 24 édroïde nous a donné ce nombre comme exprimant le summum du quaternaire par la 4e factorielle (1 × 2 × 3 × 4). Dans le 120-édroïde, il forme les 600 sommets en se combinant à 5^2, et donne la formule $5^2 (5^2 - 1)$, qui fait suite à $5 (5 - 1)$; il indique le renouvellement de la relation de la vie individuelle avec le quaternaire ; mais ici, l'individu est parvenu à un stade supérieur d'existence (son carré), et le quaternaire est pleinement épanoui dans son union avec la Beauté. On pourrait traduire ce symbole ainsi : *la combinaison de l'individualité pleinement consciente et maîtresse de toutes ses énergies avec le kosmos développant son harmonie complète.* Science et Beauté se pénétrant et unies à leur tour à la plénitude de l'autonomie consciente.

Dans le 24-édroïde, 24 se manifestait comme la synthèse des contrastes simultanés et successifs groupés deux à deux. Les expressions $(5 - 1)$ $(5 + 1)$ équivalentes à l'un de ces groupements, celui par 4 × 6, expriment encore la combinaison des éléments (4) avec la beauté (6). Mais c'est en fonction de la détermination individuelle (5) qu'ici s'opère cette pénétration. Les facteurs $(5 - 1)$, $(5 + 1)$ marquent les deux librations de l'individu, qui se condense, d'une part,

sur la base physique par contraste maximum successif pour assurer son autonomie en lui-même et qui, d'autre part, s'étend dans l'éclosion esthétique pour l'affirmer au dehors. C'est l'union dans la vie individuelle de la simultanéité et de la sucession par la Synthèse concrète. Noces merveilleuses du Kosmos et de la Beauté à travers la Vie !

***

Remontant à la constitution du facteur $(5 + 1) = 6$, comme nous l'avons fait pour $(5 - 1) = 4$. Nous aurons $(5 + 1) = (1 + \sqrt{-5})(1 - \sqrt{-5})$ ou bien $(\sqrt{5} + \sqrt{-1})(\sqrt{5} - \sqrt{-1})$. La première de ces formules est la contre-partie de celles qui donnent 4; la seconde offre des analogies avec celle qui nous a donné 10. Dans le premier cas, c'est l'unité réelle alliée aux racines imaginaires de l'individualité ; dans le 2e cas, c'est la racine réelle de l'individualité alliée à l'unité virtuelle. Dans les deux cas, c'est l'unité et la multiplicité mises en présence en fonction du principe d'individualisation. Et voilà l'expression géométrique de cette définition classique de la beauté : « L'unité dans la variété. »

La Beauté consiste, en effet, à manifester l'un par le multiple, à faire de la matière l'expression de l'Idée. Une quantité réelle est ici ajoutée ou retranchée à une quantité imaginaire ; c'est dire que la matière, pour exprimer l'idée, devra subir là des retranchements, là des adjonctions, les unes et les autres déterminées par l'idéal poursuivi. C'est la combinaison de l'acte additif et de l'acte soustractif. Et en effet, la beauté ne peut s'exprimer dans la matière qu'en respectant les lois de

la matière(1). Si donc la matière subit isolément soit des retranchements, soit des adjonctions, son équilibre passif est troublé ; elle devient un gouffre ténébreux tendant à s'emplir, ou un amas sans cohésion tendant à se désagréger. Donc, sans cesse, l'acte esthétique doit résoudre le problème du mal en combinant les retranchements et les adjonctions, et par là, l'être de la matière se trouve haussé à un degré supérieur d'existence.

Ici, les deux éléments en présence sont l'unité et la racine de 5 (principe d'individualité). La combinaison de leur somme avec leur différence, opérée exclusivement au sein de la réalité physique (cas où les deux éléments sont réels) donne le quaternaire et exprime la base physique de toute vie individuelle ; la nature virtuelle ou idéale de l'un des deux éléments (cas où l'un d'eux est imaginaire) conduit la vie individuelle à l'harmonie esthétique.

La caractéristique imaginaire appliquée à l'unité exprime le pouvoir unificateur de la pensée mis en présence de la multiplicité matérielle qui fournit par sa division les germes d'individualité. L'individualité se constitue par l'adjonction d'un principe idéal unificateur qui se liera à ce germe, sans s'identifier avec lui, mais en s'attelant à la matière tantôt pour réprimer (—), tantôt pour contenir (+) ses tendances. La combinaison de ces deux opérations : contenir et satisfaire, est ce qui établit dans toute individualité l'harmonie parfaite. C'est le *Coagula, Solve,* des alchimistes.

---

(1) Quand l'idée asservit la matière sans s'y adapter c'est le sublime ; quand elle s'efface pour exalter uniquement les propriétés de la matière c'est le joli, le précieux, le riche, l'habile, etc.

La caractéristique imaginaire appliquée au principe d'individualisation montre l'unité globale et inexpressive de la matière, qui tend à se distribuer en individualités pour devenir la réalisation de telles ou telles idées définies. Les germes d'individualisation ne sont pas ici des désirs d'être soi, mais des désirs de réaliser telle idée.

Tels sont les deux pôles de l'acte esthétique, répondant aux grandes écoles opposées de l'art. Dans l'une, l'idée s'adapte à la matière, et l'intelligence cherche à tirer de la matière les harmonies qui s'accordent le mieux avec son essence (Vénus Aphrodite) ; dans l'autre, la matière se met au service de l'idée, et l'intelligence s'en sert pour conférer l'existence individuelle aux idées. (La Lune-Isis.)

***

Le nombre de Beauté 6 se présente donc comme réalisable par diverses voies remarquables : la forme 2×3, dédoublement du ternaire ; la forme 3×2, ternaire appliqué au binaire ; la somme des 3 premiers nombres $(1 + 2 + 3)$ et leur produit $(1 \times 2 \times 3)$; enfin la forme $(5 + 1)$ comme produit de deux racines imaginaires conjuguées. La Kabbale fait correspondre le nombre 6 à la lettre ו (vau), signe convertible exprimant la relation entre le passif et l'actif, leur lien. C'est une sorte de neutralisation par exaltation. C'est bien la Beauté qui unit le discontinu et le continu dans leurs développements universels [algorithme somme $(1+2+3)$ et factorielle $(1 \times 2 \times 3)$].

Les formations de 6 par 2×3 et par 3×2 sont plus primitives. Elles pénètrent jusqu'aux plus pro-

fondes essences et concilient, par la synthèse primordiale de l'unification absolue, l'opposition radicale et irréductible du binaire. — C'est l'étoile à 6 branches, si le ternaire est primitif et contemple son reflet, réalisant son désir et se limitant lui-même dans l'harmonie parfaite. Cela répond en musique à la division binaire de la mesure à 3 temps. — Au contraire, c'est l'hexagone convexe, si le binaire est primitif, si c'est la ligne qui est donnée. Alors, la multiplication par 3 ferme le cycle, et centralise par le contraste minimum. En musique, c'est la division ternaire de la mesure à 2 temps (mesure 6/8).

Le 6 réalisé par 5 + 1 participe des deux précédents. Il résout le contraste inharmonique créé par l'individualité, non plus comme le quaternaire, en tonifiant, en élaguant l'expansion de l'individu, mais au contraire en déliant les entraves et en calmant le trouble occasionné au sein de l'universel, par l'adaptation et par la réponse du milieu aux affinités. C'est bien encore là l'expression de la Beauté, mais non plus de la beauté purement objective, cristalline, basée sur les lois absolues des nombres et des formes (Venus-Uranie, Minerve), mais de la beauté attirante, apaisante, breuvage calmant l'angoisse et saturant dans la paix harmonieuse l'âpre convoitise (Hera).

10 et 6 ne figurent en 3e dimension que pour donner, soit des moitiés de figures, soit des sections équatoriales ou méridiennes. Ils proviennent d'un dédoublement du 3 et du 5 dans la 3e dimension et introduisent le double courant en sens inverse qui donne l'équilibre mobile et fait apparaître le principe du rythme, l'un dans les principes, l'autre dans l'indivi-

dualité.— Le dédoublement de 5, synthétisé en unité complexe par l'alternance rythmique, indique le moyen de réaliser la finalité de la vie, qui est l'équilibre au sein de l'individualité par réflexion de sa nature. C'est l'esthétique transportée de la sphère idéale et imaginative dans la réalisation individuelle. C'est l'harmonie, non plus chantée par les lois, les concepts et les formes, mais effectuée par les appétitions et les actions individuelles parvenues à leur fin.

Aussi, en 4e dimension, 10 nous est apparu comme épanouissement des principes comme (3^2+1), comme la couronne du 9, 9 représentant les principes qui, chacun, rendent explicite leur triplicité essentielle. Le rapprochement de 6 et de 10, au point de vue des sommes $6 = 1+2+3$; $10 = 1+2+3+4$ indique le processus élémentaire de l'agrégation franchissant la triple enceinte des Principes pour l'auréoler de la sphère kosmique (1).

Dans les formules, le facteur 15 $(= 1+2+3+4+5)$ se montre aussi et étend encore l'agrégation jusqu'à la sphère individuelle. Sous le même rapport, $30 = (1+2^2+3^2+4^2)$ opère sur les carrés comme 10

---

(1) L'attribution de 3 à l'essence des Principes et de 4 au Kosmos est une donnée traditionnelle de l'ésoterisme. Néanmoins, l'esprit moderne ne se contente plus d'assertions. Or, la démonstration de ces dogmes traditionnels nous paraît établie par le schéma de la loi de Création qui constitue la formule résumée de la philosophie de Wronski. (Voir ce sujet parmi les œuvres de Wronski, notamment : l'*Apodectique* et la *Nomothétique*. — Voir aussi l'appendice de notre ouvrage : la *Synthèse Concrète,* consacré à l'exposition du schéma de Wronski. — Voir aussi notre article : *La Triade de la Réalité.* (Revue de Philosophie, mars 1906.)

sur les premières puissances; il constitue l'élément intermédiaire en 3e dimension, indiquant ici la réflexion qui existe entre les foyers d'existence (sommets) et leur expansion (faces). En 4e dimension, 30 opère dans un des termes extrêmes, 10 dans l'autre. 30 représente ainsi l'affirmation réfléchie et consciente du développement dont 10 exprime la production. C'est là ce qui distingue entre eux le 120 et le 600-édroïde.

Douze, Huit, Vingt

Les aspects multiples du nombre 12 et ses manifestations géométriques dans les sommets de l'icosaèdre et dans les faces du dodécaèdre, ses relations avec le nombre 20, qui lui est conjugué dans ces polyèdres, et avec le nombre 30, qui correspond à l'élément intermédiaire, apporteront peut-être quelque jour l'explication des données traditionnelles de l'astrologie. La division du zodiaque et des maisons astrologiques en 12 régions distribuées par 3 et 4 groupes, et ces divisions correspondant, l'une aux harmonies (3 groupes de 4), l'autre aux polarisations et aux obstacles (4 groupes de 3), enfin, la division par 2 ou par 6, soit par opposition, soit par contiguïté, tout cela mériterait d'être vérifié et perfectionné au moyen des mathématiques modernes. On est tenté aussi de comparer la relation entre le cercle zodiacal (qui correspond aux courants relatifs à la révolution annuelle de la terre), le cercle des maisons (qui correspond au mouvement diurne et au rapport de l'horizon avec l'équateur et l'écliptique), à la relation conjuguée qui existe entre l'icosaèdre et le dodécaèdre.

12 par 3×4, se rapporte plutôt aux causes efficientes ; par 2×6, plutôt aux finalités. Comme 3×4 ce sont les Principes qui se quaternisent, qui se revêtent de la nature, comme 4×3, c'est le Kosmos qui s'ordonne suivant les Principes. Comme 2×6, c'est la Beauté appliquée au binaire primitif, ou inversement comme 6×2, la Beauté dualisée.—Mais 12 est encore remarquable comparé à 20 dans les relations de ces deux nombres avec 16 et avec 10. On a 12 $(4^2 - 4)$ et $20 = (4^2 + 4)$; ils expriment la libration du quaternaire développé autour de sa source. Les relations $\frac{12}{20} = \frac{3}{5}$, soit $\frac{12}{3} = \frac{20}{5} = 4$, sont d'autres relations de l'équilibre quaternaire avec les principes universels et l'individualité.

$12 = 10 + 2$. Or 10 manifeste l'unification dans la plénitude du développement quaternaire. C'est un nombre de finalité. 12, en ajoutant 2. rompt la détermination qui parachève et rétablit la révolution cyclique due à la combinaison du ternaire et du quaternaire.

Dans $2 \times 10 = 20$, on passe de l'agrégat du binaire à son ingérence.

Dans le dodécaèdre, 20 considéré comme 2×10 correspond à deux zones prismatiques, l'une, allongée et étroite, donnant les deux faces extrêmes, l'autre, aplatie et large, donnant le décagone gauche. Une distribution quelque peu analogue est réalisée par les faces de l'icosaèdre : deux pyramides et une zone médiane. Ici c'est 10 orienté suivant les pôles, combiné à 10 orienté suivant l'équateur. Cela semble schématiser l'antithèse du volume longitudinal et du volume périphérique, des courants méridiens et équatoriaux. 10 évoque une plénitude

mais toujours une orientation doublement polarisée; 20 donne la plénitude complémentaire qui établit l'équilibre quaternaire. Dans l'icosaèdre et le dodécaèdre le groupement par 20 s'effectue avec alternance entre les hémisphères ; de même qu'à deux dimensions, le décagone était obtenu comme deux pentagones opposés par les sommets.

***

Entre 12 et 20 (sommets dans la 3e dimension), il y a la distinction entre la sommation et la reproduction entre 120 et 600 (sommets en 4e dimension), la distinction a lieu entre la reproduction et la graduation toujours appliquées au nombre 2. En effet, $120 = 6 \times 10 \times 2$; $600 = 6 \times 10^2$. Le binaire n'agit plus comme dualité reproductrice ; il est incorporé au dénaire pour l'élever à sa 2e puissance, 100, qui est en même temps la somme des 4 premiers cubes : $(1 + 2^3 + 3^3 + 4^3) = 100$.

120 peut aussi se concevoir comme $(5^3 - 5) = (5^2 - 5)(5 + 1) = 20 \times 6$. Ceci rattache un élément extrême de la 4e dimension à l'élément extrême opposé dans la 3e. Les considérations précédentes nous dispensent de développer l'interprétation de cette forme. Elle offre un caractère d'asymétrie intermédiaire entre $(5^2 - 5)$ et $(5^4 - 5^2)$. Ici, c'est le nombre esthétique appliqué au 20. — Enfin 20 est encore le 4e triangulaire venant après 4 et 10.

***

Une corrélation analogue à celle de $(10 + 2)$ avec (10×2) se trouve aussi entre $4 + 2$ et 4×2 pour l'octaèdre et l'hexaèdre. 8 et 6 paraissent en fonction

de 4 jouer un rôle analogue à 12 et 20 en fonction de 10. La Beauté en face de la base kosmique apparaît comme une addition, de même que le cycle complet (12) en fonction de l'accomplissement parfait (10).

Le 8, comme 2 × 4 et le 20 comme 2 × 10 doivent avoir aussi quelque parenté. Le quaternaire dedoublé, établit au sein de la stabilité kosmique, une sorte de va et vient : 8 se retrouvera surtout dans les mouvements oscillatoires. Dans l'hexaèdre et l'octaèdre, il apparaît comme un retour de l'établissement quaternaire.

8 représente dans la théorie des contrastes de M. Ch. Henry, le contraste maximum simultané dans le cas où l'un des deux segments reste fixé à l'origine.

Dans le plan, c'est l'angle à 45° évoqué par la division trice de l'angle droit. En effet, deux perpendiculaires opposent 4 directions. Elles évoquent comme complément des angles droits formés au centre, d'autres angles droits périphériques. Ces 4 carrés répondent à l'unité complexe $1 + \sqrt{-1}$; le module ou résultante, qui est la bissectrice de l'angle droit, se trouve évoqué spontanément, et la figuration de deux perpendiculaires entraîne immédiatement celle de deux autres qui les croisent à 45°. Mais là s'arrête la bipartition naturelle, car les angles de 45° font disparaître le caractère qui a provoqué cette bipartition,

8 présente la contre-partie de 10 par rapport à 3^2. On a, en effet $(3^2 + 1) = 10$ et $(3^2 - 1) = 8$. Ainsi 8 et 10 représentent la libration-unité autour de 3^2. Nous avons étudié précédemment ces librations-unités, mais en fonction de l'individualité caractérisée par 5. Ici, c'est en fonction des principes explicitement développés, chacun d'eux épanouissant le ternaire, soit

l'essence même de la principiation. C'est par ce point de vue que s'explique le rapprochement, fréquent dans l'ésotérisme, de 8 avec 10 comme nombre de perfection. 8 représente pour ainsi dire cette perfection, fermée, à l'état d'incubation, non encore épanouie; et l'idée de 8 se trouve liée à celle de souffrance. Le caractère de perfection attribué à 8 s'explique encore en ce qu'il donne le ternaire de puissance par rapport à 2, car $8 = 2^3$.

La construction de l'angle de 45°, qui correspond à la division du cycle par 8, montre ce nombre comme lié à $\sqrt{2}$, nombre de la brisure médiane, triton, intervalle dissonant, qu'il faut apprivoiser en le transformant en une consonance attractive, qui se résoudra sur la tierce et la tonique.

L'importance du nombre 8 est encore manifestée par la numération chinoise des Koua, qui paraît antérieure à la numération décimale, et qui représente un degré supérieur de numération binaire (1).

Les nombres de la 4e dimension

120 par 10 × 12 réunit dans la 4e dimension la finalité déterminée et orientée et le cours du cycle universel

(1) Voir La *Numération par huit* par Aimé Mariage (1857), où l'auteur attribue les nombreuses anomalies dans les chronologies des anciens textes à la confusion opérée par les traducteurs entre des nombres exprimés, les uns en numération par 8 et d'autres en numération décimale. Il parvient en lisant certains nombres en numération par 8 à identifier beaucoup de mesures en apparence étrangères les unes aux autres.

qui doit également animer toutes les directions. C'est la synthèse du quaternaire par sommation et du quaternaire par combinaison. 120 par 24×5, soit $(5^2 - 1)$ 5 répond, d'autre part, à l'échelon intermédiaire entre $5\,(5-1)$ et $5^2\,(5^2-1)$, et, à la suite de 3, de 6 et de 24, il est la 5e factorielle. C'est la combinaison des divers degrés genésiques : dualité, principes, kosmos, jusqu'au 5e, celui de la vie individualisée. Et 600 représentera une intensification de ce développement en répétant le 5 comme norme directrice et indépendante, et non plus seulement comme terme final du produit. En effet, $600 = 5 \times (1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5) = 5 \times 120$.

120, comme 6×20, apparaît comme nombre esthétique; il se rapproche encore de 6 par les connexions entre la sommation et la graduation. C'est un des nombres très rares qui aient ce caractère. 120 est en effet le 15e nombre somme et le 8e nombre triangulaire en même temps que la 5e factorielle. (6 est 3e nombre somme et 3e factorielle.)

Le développement des factorielles s'étend plus loin avec 720, qui, pour un des éléments intermédiaires en 4e dimension, donne $(1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6.)$ Ici, c'est l'extension, jusqu'à la réalisation esthétique de la combinaison de tous les degrés hiérarchiques. 720 se présente encore comme 72×10, et 72, c'est 24×3, soit le ternaire appliquée au nombre de la plénitude quaternaire. C'est encore $3^4 - 3^2 = (3^2 + 3)\,(3^2 - 3)$, forme dont nous avons analysé les caractères.

720 présente en fonction des puissances de 3 et de 5 des formes intéressantes :

$720 = (3^6 - 3^2) = (9^3 - 9) = 729 - 9.$

$720 = 5^4 + 5^3 - 5^2 - 5.$

720 = $5^3(5+1) - 5(5+1)$.
720 = $(5+1)(5^3-5) = 5(5+1)(5^2-1)$.

Enfin 720 = $(24 \times 10)\,3$, et 1200 = $(24 \times 10)\,5$. Or, 24×10 : c'est, nous l'avons vu, la synthèse des deux quaternaires parfaits, l'un par combinaison, l'autre par agrégation. 720 combine cette synthèse au nombre des principes ; 1200 la combine au nombre de l'individualité. D'autre part, 720 et 1200, en fonction de la 5e factorielle (120), sont entre eux comme 6 et 10, et cela peut se traduire ainsi : la combinaison des 5 premiers modes d'existence dans 720 sert d'élément à l'harmonie formelle, dans 1200 à la perfection accomplie. Les relations avec le senaire et le denaire sont ici distinctes et coexistantes. En 3e dimension, le nombre 30, qui constituait le terme intermédiaire, condensait en lui-même ces deux relations, et pouvait être considéré soit comme 3×10, Principes et Perfection, soit comme 5×6, Individualité et Beauté.

***

En définitive, la 3e dimension paraît réaliser les synthèses, en contractant les éléments dans une unification plus ou moins obscure, répondant à ce domaine psychique où l'objectif et le subjectif s'entre-croisent d'une manière inextricable. Tout corps à 3 dimensions conserve quelque chose de caché ; la forme ne s'y manifeste qu'en voilant la structure, et la structure ne se montre que par la dissection.

Il semble au contraire que le monde à 4 dimensions réponde à un épanouissement et à une neutralisation équilibrée entre la tendance expansive et la tendance

centralisatrice. L'objectif et le subjectif doivent s'y développer distinctement et face à face, la forme et la structure y transparaître l'une à travers l'autre, coexister et se réfléchir. Idéation et Réalisation, Beauté et Perfection ne doivent pas, comme chez nous, se confondre ou se substituer l'une à l'autre, mais se répondre dans une double harmonie, l'une figurative, l'autre effectuée, formant deux liens distincts entre les deux pôles de l'individualité : le point et l'enveloppe.

CHAPITRE V

Principe génétique des formes régulières

Rapport des formes régulières avec les formes sphériques

Le développement de l'espace par expansion centralisée se réalise par les formes sphériques, formes dans lesquelles l'intensité d'étendue autour d'un point central est égale en tous sens. Le point central dont les diverses puissances sont les sphères de tous les ordres dimensionnels est donc équilibré et sans orientation. La ligne, l'intensité d'expansion est la même dans toutes.

En 1re dimension la forme sphérique consiste dans la ligne bipolarisée et centrée : un diamètre. Dans une ligne l'intensité d'expansion est la même pour toutes les directions, directions qui se réduisent à deux. Cette ligne doit se concevoir comme un cycle fermé, parcouru par une oscillation d'aller et retour entre les deux extrémités.

En 2e dimension, c'est le cercle : le nombre des directions linéaires devient infini, mais le diamètre primitif crée seulement deux régions du plan. En poursuivant, on trouvera toujours un nombre infini d'orientations pour les

éléments d'ordre $(n-1)$ et deux seulement pour les éléments d'ordre n.

Le nombre 2 apparaît donc toujours comme racine des divisions sphériques. Son rôle est encore plus manifeste dans le nombre π.

En effet $\frac{\pi}{2} = \frac{2}{\sqrt{2}} \cdot \frac{2}{\sqrt{2+2}} \cdot \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}} \cdots\cdot$ indéfiniment, et encore

$\pi = \text{limite}\ 2^m \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots}}}}$ indéfiniment.

Or, π est le coefficient qui exprime l'équidistance au centre de tous les points d'une périphérie, autrement dit la rotation pure. Il indique une infinité d'orientations réalisées, avec une intensité infiniment petite, l'évanouissement des éléments rectilinéaires distincts et discontinus dans l'homogénéité et la continuité sphérique.

A l'opposé de l'expansion centralisée se trouve l'expansion orientée caractérisée par les éléments rectilinéaires. Ceux-ci ont pour essence l'unicité et l'invariabilité de direction ; leur combinaison amène une pluralité finie de directions et une discontinuité marquée par les angles ; et les angles, en même temps, ramènent indirectement à la centralisation sphérique.

***

L'hétérogénéité absolue entre la génération sphérique et la génération rectilinéaire ne cesse que dans l'infini. La recherche de leur commune mesure est le problème de la quadrature du cercle, problème désespérément cherché pendant des siècles. Il y a trente ans, on a enfin démontré l'impossibilité de la quadrature du cercle. Non

seulement le rapport de la circonférence au rayon est incommensurable comme l'est celui du côté du carré à sa diagonale, mais encore il n'est pas réalisable par la règle et le compas. Autrement dit, le nombre π n'est la racine d'aucune équation de degré quelconque à coefficients rationnels (réels ou imaginaires). Le nombre π est transcendant, ainsi que le nombre e, auquel il se rattache étroitement. L'impossibilité d'une solution numérique ou graphique avait été déjà mise en lumière par la formule donnée par Wronski, formule qui a l'avantage d'indiquer que la solution de la quadrature s'obtient dans l'infini (1). Nous étudierons ailleurs cette importante question, qui ne peut être traitée incidemment.

Laissant donc de côté cette réunion suprême dans l'infini, qui constitue la parité coronale du système spatial, édifié sur le jeu combiné des deux principes élémentaires et absolument hétérogènes, translation et rotation, nous trouvons, dans le fini, une relation qui, sans unifier les deux principes, les combine en les maintenant distincts : cette relation est réalisée par les formes régulières.

Les formes régulières représentent, à travers tous les ordres dimensionnels, l'adaptation réciproque de ces deux principes, et répondent au concours final du système spatial. Le concours final d'un système est caractérisé par l'intervention d'une influence téléologique où se manifeste l'ingérence d'un principe étranger au système, et qui apporte une détermination et une finalité au sein du

---

(1) Formule de la quadature du cercle d'après Wronski :

$$\pi = \frac{4\,\infty}{\sqrt{-1}}\left[(1+\sqrt{-1})^{\frac{1}{\infty}} - (1-\sqrt{-1})^{\frac{1}{\infty}}\right].$$

développement indéfini et arbitraire dont les éléments sont susceptibles. Ici, ce principe étranger aux éléments géométriques, c'est le Nombre avec les qualités étroitement liées à son essence.

Les formes régulières répondent bien à l'adaptation réciproque de la rotation et de la translation. A l'unité de contour et à l'homogénéité des périphéries sphériques, elles substituent des multiplicités d'éléments hiérarchiquement distincts et répondant à chaque ordre dimensionnel (sommets, arêtes droites, plans, polyèdres, etc.), cela tout en conservant entre les éléments d'un même ordre l'équidistance à un centre unique. C'est le maximum d'hétérogénéité et de discontinuité conpatible avec l'intégrité du principe de rotation. D'autre part, dans ces figures, les intersections d'une pluralité d'éléments de translation distincts et diversement orientés sont telles, que tous les éléments d'une même ordre sont égaux et également répartis sur la sphère, chacun conservant l'invariabilité de direction qui caractérise tout élément rectiligne. C'est le maximum d'homogénéité et de continuité compatible avec l'intégrité du principe de translation.

***

Les formes régulières ont donc pour essence de diviser l'homogénéité et la continuité des sphères à n dimension par des éléments rectilignes égaux dans chaque ordre dimensionnel. Or cette divisibilité possible par n'importe quel nombre d'éléments en 2e dimension se restreintà 5 espèces dans la 3e, à 6 dans la 4e, à 3 dans toutes les dimensions successives.

La centralisation autour d'un point est donc réfractaire à la division égale et indéfinie par les éléments rectilinéaires ; elle restreint la possibilité de multiplier les orientations d'étendue égales et finies et cette incompatibilité est décelée par la nature du nombre incommensurable π. Au delà de ces degrés restreints de division, la différenciation s'opère, les distinctions individuelles se multiplient, les types s'altèrent, les réductions de symétrie diminuent l'équilibre des objets et les inclinent au mouvement, et ainsi, le serpent qui enveloppe les sphères contraint les formes à sortir de l'état statique, et active la vie individuelle par les atteintes portées à l'équilibre des types.

Lois de limitation des formes régulières

Il existe, pour la possibilité des formes régulières d'un ordre dimensionnel donné, deux lois restrictives. La première, plus générale, opère la sélection entre les espèces de formes des dimensions $(n-1)$ susceptibles de donner des formes de la dimension n. M. Stringham (1) a formulé cette loi en un double principe : tout angle régulier a n

(1) V. Stringham : *Regular figures in n dimensional Space* (Journal of Mathematics, vol. III.) — V. aussi Maurice Boucher : *Essai sur l'hyperespace*, où se trouve exposée en détail la théorie de M. Stringham. Nous insistons ici sur les points de la théorie que M. Boucher a omis ou laissé dans l'ombre, nous référant à son ouvrage pour les parties qu'il a données dans tout leur développement.

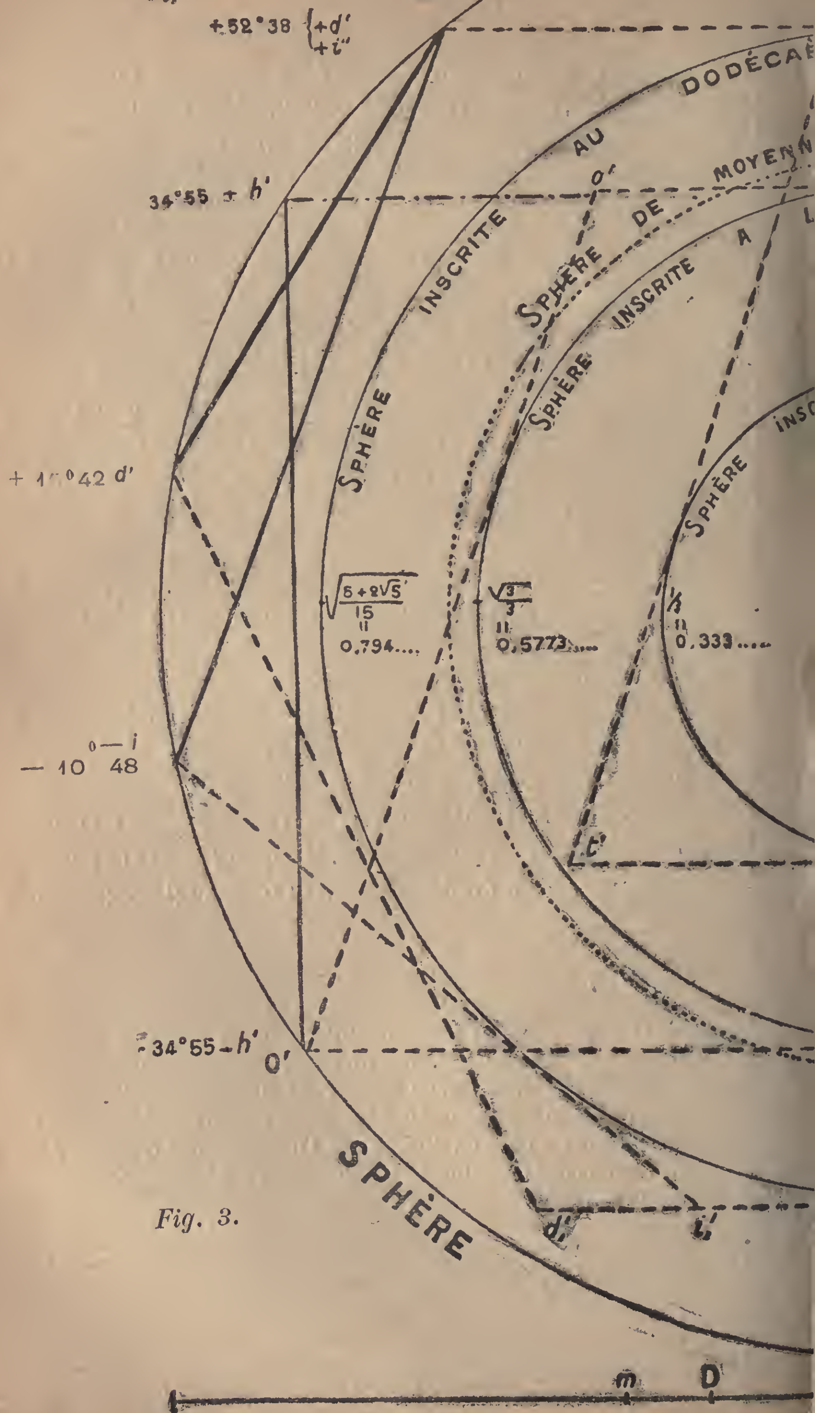
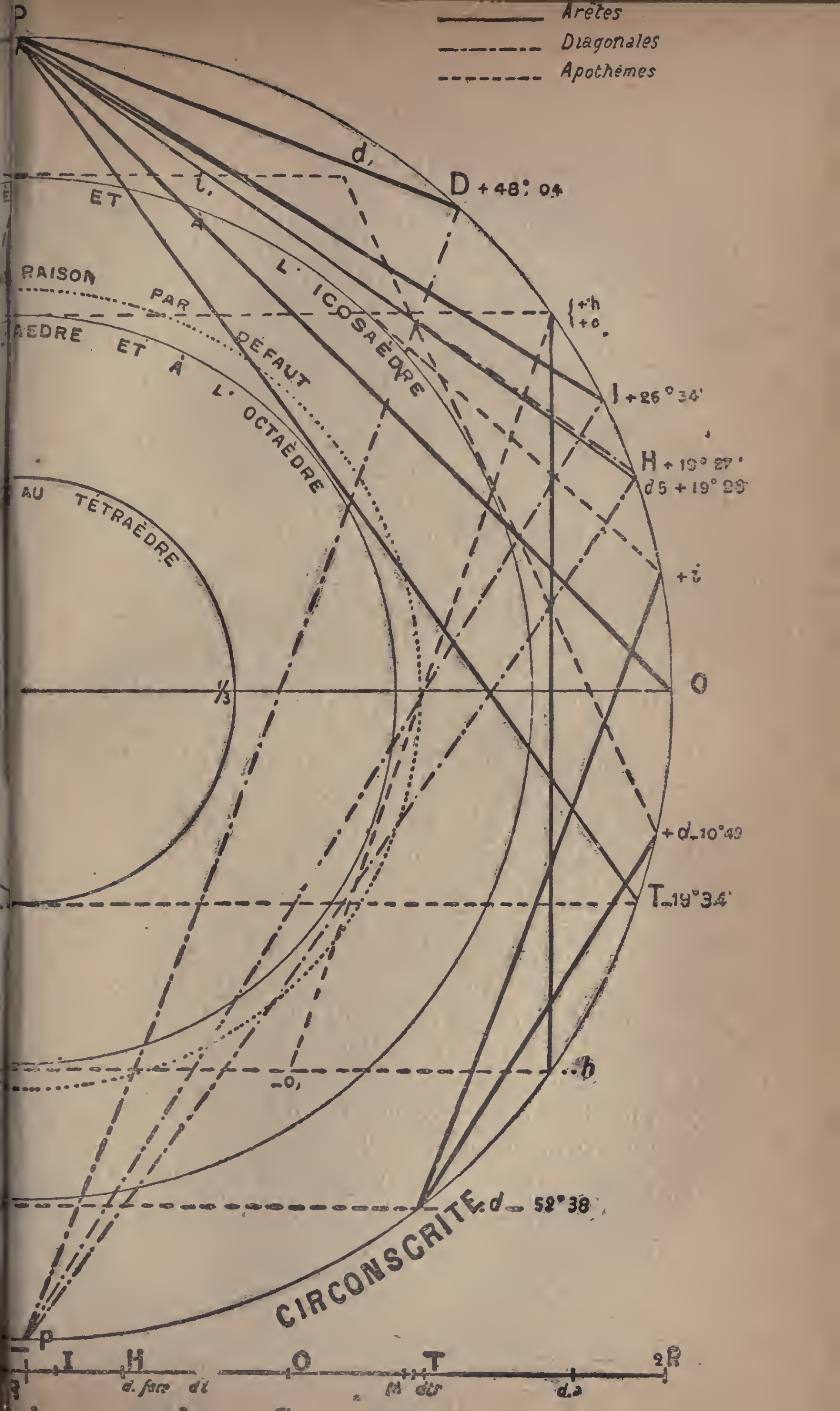

Les lettres sont les initiales des Polyèdres
T t t' to éléments relatifs au Tetraèdre
H h h' à l'Hexaèdre
O o o' à l'Octaèdre
D d d' au Dodécaèdre
I i à l'Icosaèdre
+52°38
+d'
+i''
34°55 + h'
+ 10°42 d'
— 10°48
— i
-34°55 - h'
o'
SPHÈRE INSCRITE AU DODÉCA
SPHÈRE DE MOYENNE
SPHÈRE INSCRITE A L
SPHÈRE INSC
0,794....
0,5773....
1/3
0,333....
t'
d'
i'
SPHÈRE
m
D

Fig. 3.



Arêtes
Diagonales
Apothêmes
P
d,
i,
D + 48° 04
ET
À
L' ICOSAÈDRE
RAISON
PAR
DÉFAUT
AÈDRE ET À L' OCTAÈDRE
+h
+o
I + 26° 34'
H + 19° 27'
d 5 + 19° 29'
AU TÉTRAÈDRE
+ i
1/3
O
+ d - 10° 49
T - 19° 34'
-o,
h
d - 52° 38
CIRCONSCRITE
p
I
H
O
T
2R
d. face
di
M
d.2

dimensions doit avoir, d'une part, pour enveloppes, d'autre part pour bases, des formes régulières appartenant à une des espèces existant dans la (n — 1e) dimension. Cela résulte de la définition même des formes régulières. On obtiendra ensuite une première sélection des formes possibles par les combinaisons 2 à 2 entre espèces de formes, une espèce étant prise pour enveloppe, l'autre pour base. Par exemple, un angle à 4 dimensions ayant pour face un tétraèdre aura forcément des arêtes se terminant soit à un trétraèdre, soit à l'un des quatre autres polyèdres. Cette loi donne, pour la 4e dimension, une première élimination qui ne laisse subsister que 11 combinaisons ; pour la 5e et, pour toutes les dimensions supérieures, il y a 12 combinaisons.

Cette loi n'a pas d'application dans la 3e dimension. En effet, comme il existe des polygones réguliers d'un nombre quelconque de côtés, la loi précitée permettrait de concevoir des angles polyèdres ayant pour faces ou pour bases n'importe quel polyèdre.

Pour déterminer les 5 polyèdres seuls possibles, on démontre d'abord l'équation d'Euler :

Arêtes + 2 = Sommets + Faces,

qui s'applique aux polyèdres réguliers ou irréguliers, et se démontre en juxtaposant plusieurs polygones convexes en réseau sans vide. Puis, chaque arête, étant commune à 2 faces et réunissant 2 sommets, on pose :

Arêtes + 2 = n Faces = m Sommets

n étant le nombre d'arêtes circonscrivant une face, m le nombre d'arêtes rayonnant d'un sommet.

De ces équations, on tire celle-ci :

$$\text{Somme} — \text{Produit} \times \left\{ \begin{array}{l} \text{du rayonnement d'un sommet } (m) \\ \text{de la circonscription d'une face } (n) \end{array} \right.$$

Fig. 4.

Rayons des cercles circonscrits aux faces

Rayons des sphères inscrites

T

19°25
0.942

H
O

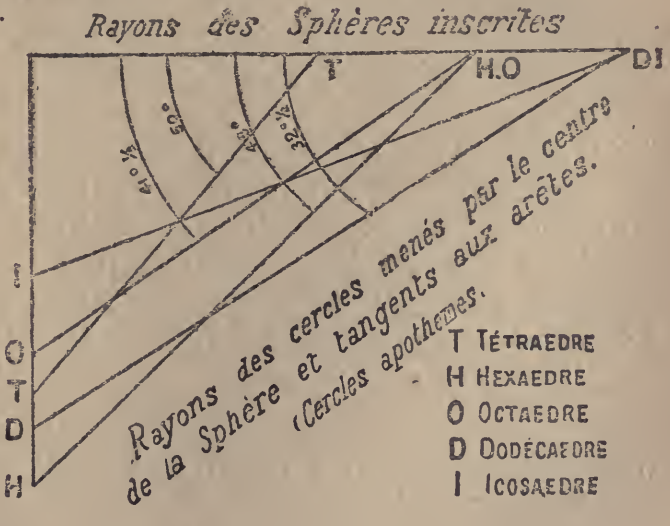
34°55
0.819

D
I

52°35
0.607

approx. égaux

Fig. 5.



$= 4 \times$ le quotient du rayonnement d'un sommet par le nombre total des faces F

$$(m + n) - m\,n = 4\,\frac{m}{F}$$

D'autres théorèmes établissent certaines corrélations entre la nature des rayonnements et celle des circonscriptions pour les polyèdres convexes réguliers ou irréguliers (1).

***

La détermination des polyèdres réguliers est ainsi présentée comme un cas particulier de celle des polyèdres irréguliers. Elle possède la sûreté logique des démonstrations algébriques, mais elle masque le principe fondamental, qui provient de la nature de la sphère et du plan, principe qui est le contraste quaternaire simultané marqué par l'angle droit et caractéristique de l'espace euclidien.

Au contraire, ce principe est mis en évidence par la démonstration spéciale aux polyèdres réguliers, tirée de ce théorème : la somme des faces d'un angle polyèdre est inférieure à 4 droits. Et, comme tout angle polyèdre a au moins 3 faces, il est évident que les seuls polygones susceptibles de former des polyèdres sont ceux dont l'angle inscrit est inférieur au tiers du cercle soit à 120° ; ils donneront chacun autant de polyèdres qu'on pourra en grouper autour d'un sommet, sans atteindre 4 angles droits, le groupe étant de 3 au minimum. Les possibilités sont

---

(1) Voir Traité de Géométrie (T. II, pp. 105 et suiv.). Rouché et Comberousse.

alors 3, 4 ou 5 triangles, 3 carrés, 3 pentagones. La limite de 4 angles droits se trouverait exactement atteinte avec 4 carrès ou 3 hexagones. Ces groupements donnent des réseaux plans sans interstices.

Le principe sur lequel est fondée cette détermination a été étendu par M. Césaro (1) à tous les ordres de dimensions. Elle est pour la 4e dimension de 8 trièdres trirectangles.

D'autre part, M. Césaro a généralisé également la démonstration qui conduit pour les polyèdres à la formule d'Euler, puis établissant, comme on le fait pour les polyèdres, certaines relations entre les nombres d'éléments constituant les rayonnements et les circonscriptions, il est parvenu, sans invoquer la loi de M. Stringham, aux mêmes 11 cas de première élimination. Le principe du maximum des angles opère une deuxième élimination, qui ne laisse subsister comme possibles que 6 polyèdres et un réseau d'hexaèdres. M. Stringham aboutit au même résultat avec un procédé moins rigoureux peut-être, et consistant dans cette remarque que les polyèdres formant la base d'un angle à 4 dimensions doivent s'inscrire dans une sphère à 3 dimensions de rayon inférieur à celui de la sphère à 4 dimensions dans lequel s'inscrit le polyédroïde.

Pour la 5e dimension, ces deux auteurs aboutissent aux mêmes conclusions encore, mais chacun en suivant leurs procédés distincts. Après avoir trouvé par première élimination 30 combinaisons, M. Césaro tombe comme M.

---

(1) *Forme poliedriche regolari et semi-regolari in tutti gli spazi* (1885), par Césaro.

Stringham à 12 cas, qui se réduisent aux 3 formes appartenant aux séries illimitées, et tous deux établissent que ces trois séries seules persistent dans les dimensions supérieures. Parmi les autres combinaisons, 3 viennent se confondre avec les précédentes, auxquelles elles sont identiques, 3 sont imaginaires, 3 enfin donnent des réseaux qui proviennent, d'après M. Césaro, du 24-édroïde, l'octaédroïde et de l'hexadécaédroïde. Enfin, M. Césaro établit qu'au delà de la 5ᵉ dimension, il n'existe plus qu'un seul réseau.

La 3ᵉ et la 5ᵉ dimension seules donnent donc 3 réseaux (qui, bien entendu, se réduisent à des figures à 2 et à 4 dimensions).

***

Par des procédés à peu près analogues, M. Stringham et M. Césaro construisent les 3 séries illimitées d'après les systèmes qui leur sont propres : déplacement parallèle dans la nouvelle dimension pour la série hexaédrique, axe perpendiculaire à la forme dans la nouvelle dimension, sur lequel on place un sommet pour la série tétraédrique, et deux sommets (un de chaque côté de la forme de base) pour la série octaédrique. De cette construction résultent les lois combinatoires dont M. Stringham a tiré les 3 formules binomales caractérisant un développement indéfini. Des mêmes procédés de construction, M. Stringham a déduit les formules donnant la longueur des arêtes a en fonction du rayon r_n de la sphère à n dimensions. Les voici :

Série tétraédrique $a = r_n \sqrt{\frac{2n+1}{n}}$ car la distance du centre d'une figure à l'un de ses sommets a

pour mesure $\frac{n}{n+1}$ fois la distance d'un sommet au au centre de l'élément opposé d'ordre $\frac{n}{n+1}$

Série hexaédrique : $(2 r_n)_2 = n\, a_n^2$ ou $r_n \frac{2}{\sqrt{n}}$ autrement dit le carré du diamètre de la sphère à n dimensions est égal à n fois le carré de l'arête.

Série octaédrique $a = r_n \sqrt{2}$ puisque chaque arête est obtenue en ramenant l'hypoténuse d'un triangle rectangle dont les deux autres côtés sont deux rayons de la sphère à n dimensions. Cette valeur $\sqrt{2}$ est constante à travers toutes les dimensions et persiste dans un espace ayant un nombre indéfini de dimensions.

Pour cette valeur infinie de n, l'arête devient nulle dans la série hexaédrique ; et dans la série tétraédrique elle atteint comme valeur limite $\sqrt{2}$, valeur constante pour la série octaédrique. Ainsi, dans l'espace absolu, le processus du contraste maximum successif (série tétraédrique) se résout dans celui du constraste maximum simultané (série octaèdrique) ; tandis que le développement par translation ne peut plus rien engendrer, l'étendue étant épuisée. Cette évolution exprime clairement l'essence de l'espace : séparation et coexistence des différences, qui répond à la notion de contraste maximum simultané.

***

M. Jouffret (1) a construit les polyédroïdes des 3 séries illimitées et le 24-édroïde en partant du quadrièdre

(1) V. Jouffret : *Mélanges de géométrie à 4 dimensions.*

droit résultant des 4 axes perpendiculaires. Ce quadrièdre a 4 arêtes, 6 faces, 4 trièdres et un tétraèdre pour couvercle. Il y a 16 quadrièdres droits autour d'un point.

Chose remarquable, il y a, en 4eme dimension, deux degrés de perpendicularité et de parallélisme pour les plans. Deux plans absolument perpendiculaires, en 4e dimension, s'intersectent suivant un point; c'est l'intersection de 4 espaces à 3 dimensions. Il n'y a qu'une seule droite du plan qui soit parallèle à un plan absolument parallèle au premier. — Dans le quadrièdre droit, les 6 plans se divisent en 3 couples; les plans d'un même couple sont entre eux absolument perpendiculaires; ils ne sont que simplement perpendiculaires avec les plans des autres couples. Pris 3 à 3, les demi-axes forment 4 trièdres rectangles.

Le quadrièdre droit et les bissectrices des axes fournissent 3 octaèdroïdes et 3 hexadécaédroïdes diversement situés, et la synthèse de ces polyédroïdes donne le 24-édroïde (ou icosatétraédroïde). Le longueurs des arêtes de ces divers polyédroïdes sont toutes exprimables par des nombres très simples en fonction d'une longueur unité prise sur les axes à partir du centre. L'arête des tétraèdres réguliers qui forment couvercles des quadrièdres $= \sqrt{2}$. Cette arête étant prise à son tour pour unité, il y a 96, droites de longueur = à l'unité, qui sont les arêtes de l'octaédroïde et du 24-édroïde; 72 droites $= \sqrt{2}$, arêtes de l'hexadécaédroïde (diagonale des octaèdres constitutifs du 24-édroïde); 96 droites $= \sqrt{3}$, diagonales des hexaèdres constitutifs de l'octaédroïde; 12 droites $= 2$ ou $\sqrt{4}$, qui sont les grandes diagonales des octadréoïdes et du 24-édroïde.

***

M. Jouffret n'a pas parlé du 120 et du 600-édroïde ; M. Césaro révoque en doute leur existence, regardant comme douteux le procédé de construction employé par M. Stringham, que voici : Il groupe autour d'un polyèdre, pris pour base, des polyèdres de l'un quelconque des 5 types. Il amène ensuite en contact toutes les faces extérieures, grâce à la double hypothèse que les polyèdres sont élastiques, et que la 4e dimension permet ce rapprochement sans déformer les éléments à 3 dimensions. Les 3 cas où l'arête du polyèdre-enveloppe est plus longue que le rayon de la sphère inscrite au polyèdre de base donnent les 3 formes précitées.

De cette construction, M. Stringham a tiré un moyen de calculer l'arête du 24-édroïde. Elle est égale au rayon de la sphère circonscrite à 4 dimensions, ainsi que celle de l'octaédroïde (série hexaédrique). Cette propriété ne se rencontre pas en 3e dimension ; en 2e elle appartient à l'hexagone. — M. Stringham établit encore que les arêtes du 120 et du 600-édroïde sont plus courtes que celles d'un dodécaèdre inscrit, car les dodécaèdres-enveloppes sont eux-mêmes inscrits dans des sphères dont les rayons sont plus courts que le rayon de la sphère circonscrite à 4 dimensions. Il s'ensuit que ces deux formes ont (comme le dodécaèdre en 3e dimension) une arête plus courte que le rayon de la sphère circonscrite à 4 dimensions.

M. Stringham obtient le nombre des sommets de ces diverses formes par voie d'addition et opère les réductions qui résultent des groupements effectués. De ses trois critériums, il tire ensuite le nombre des autres éléments. Mais il n'a établi, comme pour les séries illimitées, ni principe géométrique, ni une formule générale dont on puisse déduire immédiatement le nombre des

éléments. Les formules que nous avons exposées pour les suites du dodécaèdre et de l'icosaèdre, sans prétendre donner l'expression complète et définitive de leur loi genétique, nous révèlent, il me semble, le principe et le mode évolutif qui régit ces suites.

Ainsi que M. Stringham lui-même le fait observer, les conditions restrictives qui limitent le nombre des formes régulières possibles à travers les *n* dimensions sont relatives seulement au mode de génération par rayonnement autour d'un sommet. Or, bien qu'en 3e dimension, tous les polyèdres satisfassent à ces conditions, ils peuvent être construits par des procédés étrangers au principe fondamental. Telle, la construction de l'hexaèdre et surtout du dodécaèdre, quand on part d'un réseau de faces, et non d'un rayonnement autour d'un sommet. Il est donc fort possible que, dans les dimensions supérieures on puisse générer des formes régulières par des modes autres que le rayonnement autour d'un sommet. Or les formules obtenues pour les suites de l'icosaèdre et du dodécaèdre présentent, nous l'avons vu, certains caractères qui tendent à indiquer une limitation, et d'autres, au contraire, qui se prêtent à un développement indéfini. Ces réserves faites, les limitations établies par M. Stringham conservent toute leur valeur, eu égard aux procédes genétiques qui nous sont connus.

Enfin, le fait que les trois séries du tétraèdre, de l'hexaèdre et de l'octaèdre se prolongent indéfiniment ne prouve pas la possibilité d'un nombre illimité de dimensions, mais seulement que, cette dernière condition étant satisfaite, l'autre s'ensuit. En effet, établir une nouvelle dimension, c'est élever une perpendiculaire commune à l'universalité d'un ordre spatial. Or, la série hexaé-

drique consiste à élever autant de perpendiculaires qu'il y a de sommets dans la dimension précédente. La série du tétraèdre pose un sommet nouveau sur l'axe nouveau ; la série octaédrique en place deux (un de chaque côté). Le prolongement indéfini de ces trois séries est ainsi une conséquence, et non une preuve, du développement indéfini des dimensions.

Causes des limitations des formes régulières

Malgré la rigueur des démonstrations (sauf peut-être pour le 120 et le 600-édroïde) par lesquelles on établit quelles sont les formes régulières possibles dans les *n* dimensions, l'esprit demeure étonné de ce changement brusque dans les conditions de la divisibilité de l'étendue subordonnée à la centralisation ponctuelle. L'enchaînement des propositions et les transformations de formules ressemblent à des réactions chimiques qui montrent par quelles étapes s'opèrent les combinaisons, sans renseigner sur l'essence des affinités qui les provoquent. Les preuves mathématiques apportent plus souvent l'affirmation certaine d'une nécessité qu'elles ne dévoilent le fondement essentiel de cette nécessité. Elles montrent la nécessité comme résultant d'un concours de circonstances restrictives de la possibilité ; mais l'esprit se demande encore comment le groupement des circonstances aboutit à une synthèse typique, évocatrice d'une essence causale et d'une finalité caractéristique. Il y a donc quelque chose à découvrir par delà le fait purement mathématique ; la source des lois qui commencent à agir sur la quantité, à partir d'un certain ordre ou d'un certain point,

MESURES DES

POLYÈDRES	Nombre de Faces	Nombre des côtés d'une face	Espèce des faces	Nombre de sommets	Nombre des arêtes d'un angle polyèdre	Espèce des angles polyèdres	Nombre des Arêtes	Espèce du Polyèdre	DIÈDRES DES FACES — Expression trigonométrique	DIÈDRES DES FACES — Degrés	des … en fo…
TÉTRAÈDRE.	4	3	1	4	3	1	6	1	$\cos. \alpha = \frac{1}{3}$	70° 37'	
HEXAÈDRE.	6	4	1	8	3	1	12	1	$\cos. \alpha = 0$ (exact)	90°	2
Diagonale de face. . . .	...	...	...	...	...	...	...	...	....	....	ar.
OCTAÈDRE.	8	3	1	6	4	1	12	1	$\cos. \alpha = -\frac{1}{3}$	109° 28' 16" 4	
DODÉCAÈDRE.	12	5	1	20	3	1	30	1	$Tg. \alpha = -2$	116° 35' 58" (approché)	$\sqrt{15}$
Diagonale de face. . . .	...	...	...	...	..	...	...	...	....	....	ar. ×
Diagonale Tropique. . .	...	...	...	...	..	...	...	...	....	....	$\sqrt{}$ 4R
Diagonale Arctique (arête du Dodécaèdre de 7e espèce)	...	...	...	...	...	...	...	...	....	....	Diag fa
ICOSAÈDRE.	20	3	1	12	5	1	30	1	$\sin. \alpha = \frac{2}{3}$	138° 11'22"75 (exact)	$\sqrt{10}$ (
Diagonale (arête de l'icosaèdre de 7e espèce).	...	...	...	..	...	...	...	...	....	....	Arête
Dodécaèdre (7e esp.) étoilé.	12	5	2	20	3	1	30	7	....	....	= dia
Icosaèdre (7e esp.) étoilé . .	20	3	1	12	5	2	30	7	....	....	= dia
Dodécaèdre (3e espèce) étoilé, à faces convexe	12	5	1	12	5	2	30	3	....	....	= ar
Dodécaèdre (3e esp.) étoilé, à faces étoilées.	12	5	2	12	5	1	30	3	....	....	= di

…LYÈDRES

…NGUEURS …s et des DIAGONALES du rayon de la sphère …rconscrite	Valeur numérique	Corde	LATITUDES (l'équateur étant 0° en plaçant le pôle + (+ boréal, — austral)) sur un sommet	sur l'axe passant p^r le centre d'une face	RAYONS DES SPHÈRES inscrites	RAYONS DES SPHÈRES circonscrites (l'arête ou la diagonale étant prise pour unité)	inscrites
	1,632994	109°34	+90° −19°34	+19°34 −90°	$\frac{1}{3}$	$\frac{\sqrt{6}}{4}=0,6123$	$\frac{\sqrt{6}}{12}=0,2041$
	1,154700	70°33	±90° ±19°27	±34°55'	$\frac{\sqrt{3}}{3}$ égal à 0,5773	$\frac{\sqrt{3}}{2}=0,866$	$\frac{1}{2}=0,5$
…2	1,6326158	109°27	....	....		$\frac{\sqrt{6}}{2}=1,2246$	....
	1,414	90°	±90° 0°	±34°55'	égal $\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}=0,707$	$\frac{\sqrt{6}}{6}=0,4082$
…3	0,713644	41°56	±90° ±48°04 ±19°28	±52°38' ±10°48'	$\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}}$	$\frac{\sqrt{15}+\sqrt{3}}{4}=1,401$	$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{25+11\sqrt{5}}{10}}$
…+ 1) / 2	1,15367	70°32	(mêmes latitudes)		égal à 0,794	$\frac{\sqrt{3}}{2}=0,866$	égal à 1,1134
… 2 face	1,63270	109°23				(mêmes rayons)	
…5 + 1) / 2	1,868256	138°10	....	....	égal à		
…5)	1,051462	63°26	±90 ±26°34	±52°38 ∓10°42	$\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}}$	$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}=0,951$	$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7+3\sqrt{5}}{6}}$
…+ 1 / 2	1,7011652	117°29	....	....	....	....	égal à 0,75573

…arctique du dodécaèdre convexe.....	*(non calculées).*	mêmes rayons que pour les polyèdres convexes.	*(non calculées).*
…de l'icosaèdre convexe..............			
…icosaèdre convexe..................			
…de l'icosaèdre convexe..............			

peut être cherchée dans des degrés plus reculés et se dévoiler à l'examen des modes genétiques divers dont une même quantité ou une même forme sont susceptibles.

La loi qui établit un premier degré de sélection en imposant, comme enveloppes aux formes à n dimensions, les seules formes possibles à n—1 dimensions ne commence à se manifester qu'avec la 4e dimension. En effet, tous les polygones réguliers existent; on pourrait donc supposer que tous peuvent constituer des polyèdres. C'est l'autre loi qui restreint ce privilège à trois seulement d'entre les polygones. Mais ne peut-on pas découvrir, dans la nature même de ces trois polygones, un caractère spécial qui laisse entrevoir l'apparition de la loi plus générale devenue manifeste dans la 4e dimension ?

La loi plus restreinte achève de déterminer les formes possibles en établissant la somme des angles-enveloppes à n—1 dimensions, groupés autour d'un point dans cette $(n-1)^{\text{ième}}$ dimension, comme limite supérieure du même groupement opéré dans la $n^{\text{ième}}$ dimension. Cette loi, qui seule détermine la sélection des 5 polyèdres, semble s'évanouir vis-à-vis des polygones, puisqu'il existe des polygones d'un nombre quelconque de côtés. Cherchons cependant si elle ne s'y trouve pas d'une manière potentielle et comme en germe.

En fonction des polyèdres, cette loi s'énonce ainsi : la somme des angles formés autour d'un point dans le plan (2e dimension) est la limite supérieure des angles-faces d'un angle polyèdre (3e dimension). Pour appliquer cette loi aux polygones, on dirait : la somme des angles formés autour d'un point sur une ligne (1re dimension) est la limite supérieure des angles des côtés qu'on peut grouper

autour du sommet d'un angle plan (2e dimension). — Un tel énoncé paraît dépourvu de sens, car on ne peut concevoir d'angles contenus dans la première dimension.

Mais on peut rechercher si le germe de l'angle n'est pas manifesté par quelque indice au sein de la simple ligne. Si cela est, retenons que cet indice consiste forcément dans un rapport de longueur.

Pour appliquer à la troisième dimension la loi plus générale qui fait dépendre l'existence d'une forme régulière à n dimension de l'existence des formes régulières à $n - 1$ dimensions, il faut supposer qu'elle exige, outre l'existence, un attribut de plus. La possession de cet attribut impliquant, à fortiori l'existence pure et simple, ce défaut d'existence masque la nécessité plus spéciale de l'attribut exigé. Pour découvrir cet attribut, il faut donc remonter jusqu'à un degré où son absence n'a pas déjà entraîné, pour le degré suivant, le défaut d'existence. Ainsi, on peut pressentir que la cause fondamentale de la sélection des formes régulières réside dans une prérogative appartenant exclusivement au triangle, au carré, au pentagone et, comme cas limite, à l'hexagone.

Reliant ces deux lois, nous chercherons cette prérogative dans un rapport numérique réalisé dans la 1re dimension et provoquant, dans la 2e dimension, les divisions du cercle qui correspondent à l'un des 3 ou 4 polygones prédestinés. Nous allons montrer, en effet, que les deux lois de sélection des formes ne sont que deux degrés de manifestation d'un des principes les plus fondamentaux de la divisibilité de l'étendue en fonction de la centralisation. Sur le terrain psychique, ces principes correspondent aux conditions mêmes de la conscience et concernent les rapports du sujet avec le temps, l'espace et

avec sa propre synthèse individuelle. C'est sur ce rapport entre la conception objective de la science mathématique et son adaptation subjective à la conscience que se base la remarquable théorie de M. Ch. Henry sur les contrastes et les rythmes, théorie à laquelle nous avons déjà apporté, je pense, de nouveaux étais, et dont nous allons ici encore fortifier les bases.

***

Le mode de division d'une grandeur peut provenir d'un caractère propre à l'agent qui divise, ou à la fin qu'il se propose. En ce cas, la grandeur homogène et continue répond docilement à l'action. A cet ordre d'idées appartiennent les sectionnements suivant des rapports incommensurables ou transcendants. Au premier chef, ce genre de division donne le passage de la ligne droite à la circonférence, relation qui est, en somme, la base de toutes les formes régulières, et appartient au caractère transcendant.

La division par les nombres racines est moins hétérogène à la grandeur que celle par les nombres transcendants : elle n'exige pas pour s'exprimer l'opposition d'une courbe à une droite, comme le font généralement les divisions transcendantes; elle trouve le moyen de s'exprimer par un simple rapport angulaire. Elle se relie davantage aux divisions opérées par les nombres commensurables, qui, elles, dérivent surtout de l'essence même de la quantité, et beaucoup moins d'une qualité ou d'une modalité spéciale.

En effet, si l'on suppose l'acte diviseur indéterminé, tendant simplement à diviser de la manière la plus simple,

le mode de division recevra sa détermination d'une part, des conditions générales de la quantité, temps et espace, d'autre part, des procédés opératoires généraux auxquels se prête naturellement la quantité. Ces procédés sont exprimés par les trois algorithmes fondamentaux (sommation, reproduction, graduation), qui répondent, le premier à la succession, le dernier à l'intensité, le second à la simultanéité.

Les contrastes successifs et simultanés répondent aux conditions du temps et de l'espace, à la sommation et à la reproduction. Quant à la graduation, elle ne peut s'accomplir dans l'étendue et s'exprimer en pluralité qu'en empruntant les procédés de la reproduction. En effet, il n'existe pas d'opération arithmétique ou géométrique spéciale pour cet algorithme. Pour élever à une puissance, on fait une série de multiplications, on mène une série de perpendiculaires, mais l'on ne peut passer d'une puissance à une autre directement par substitution instantanée de la puissance à la racine ou d'une forme hexaédrique ayant n dimension à la forme hexaédrique de dimension $(n \pm a)$.

Les contrastes

La division introduit par son essence l'hétérogénéité. Elle porte avec elle, et quel que soit son coefficient, la notion de contraste. Diviser, c'est distinguer, opposer des parties. Moins les parties seront nombreuses plus elles seront distinctes. Quand elles se multiplient, le seul élément qui les différencie, c'est-à-dire la situation, s'efface peu à peu ; elles tendent à disparaître comme

individus pour constituer une classe, un ensemble, équivalant au tout et contrastant avec lui par les seuls caractères génériques de la discontinuité opposée à la continuité et de la pluralité comparée à l'unité. Laissant ici de côté la théorie des ensembles, remarquons seulement que la notion de contraste est liée aux nombres très voisins de l'unité.

Il y a donc à déterminer quel est le nombre qui limite la notion de contraste, et quels sont les nombres qui correspondent aux divers contrastes.

Le nombre 2 apparaît évidemment comme le fondement de tout contraste ; il se rattache à la simultanéité, car la première opération de division élémentaire établit simultanément 2 segments. D'autres fractionnements peuvent s'accomplir aussi simultanément, mais ils ne mettront pas aussi bien en évidence le contraste des parties entre elles. Géométriquement et dans la 1re dimension, le contraste simultané donnera une ligne divisée en deux parties avec une centre et deux extrémités. Les parties contrasteront entre elles au minimum, car c'est par la situation seulement qu'elles diffèrent. Chacune contrastera au maximum avec le tout.

Le nombre 2 peut se concevoir comme successif au point de vue ordinal; mais, si l'on s'y arrête, l'équivalence de la dualité immédiate obtenue par l'acte de division le plus élémentaire substitue une idée de simultanéité à celle de succession.

Le nombre 3 peut se concevoir comme simultané, mais médiatement, comme résultat d'une division binaire, car, chose remarquable, la division d'un tout en deux parties entraîne immédiatement trois points d'arrêts, le milieu et les extrémités. Si on conçoit une division ter-

naire s'accomplissant d'un coup (chose que l'expérience géométrique démontre très difficile), cette division équivaut à une division binaire transformée par dualité, les points d'arrêt étant remplacés par des longueurs et les longueurs par des points d'arrêts. Dans cette substitution réciproque entre le ternaire et le binaire se trouve le germe de toutes les relations spatiales non métriques.

Le caractère métaphysique de cette substitution, qui est le principe de la loi de dualité, consiste dans le transport d'un caractère de l'acte à l'objet, de la cause à l'effet.

Le nombre 3 apparaît encore comme synthèse du binaire ; c'est déjà là un caractère successif, au moins vis-à-vis de la pensée, qui ne le conçoit ainsi qu'après avoir préalablement conçu le binaire.

Mais c'est au point de vue ordinal que 3 est caractéristique du contraste successif; car, tandis que la division par 2 s'accomplit par un seul acte, donc instantanément, la division par 3 exige 2 actes (sauf le cas de simultanéité réductible au binaire par substitution). Elle pose en même temps deux grandeurs, le tiers et les deux tiers et, par conséquent, le contraste successif se dédouble. Les deux tiers ont, pour commune mesure avec le tout, le tiers restant. Ce tiers est un contraste minimum, puisque sa répétition normale ramène le tout aussi vite que possible (après 2) ; les deux tiers sont un contraste maximum, comme également différents du tiers et du tout.

Tels sont les contrastes fondamentaux appliqués à la 1re dimension ou à l'échelle des nombres entiers.

***

M. Ch. Henry a établi les contrastes en fonction de la 2e dimension ou du cercle. Les résultats sont équivalents. Mais la propriété du contraste minimum successif est alors bien mieux affirmée, car il a pour mesure le tiers du demi-cercle qui a pour corde le côté de l'hexagone inscrit, égal au rayon. Le contraste maximum successif est allors marqué par les deux tiers du demi-cercle dont la corde (côté du triangle équilatéral) a pour longueur $\sqrt{3}$ en fonction du rayon.

Le contraste simultané donnait, en 1re dimension, par la ligne bipolarisée, à la fois son maximum et son minimum. Ici, le diamètre ne donne plus que le minimum, puisqu'il représente les deux directions seules étrangères à la 2e dimension, dont l'ensemble contraste avec la 1re dimension tout entière. Le maximum simultané sera donné par la division binaire de cette étendue qui sépare les deux extrémités du diamètre, c'est-à-dire par l'angle droit et par le quart de cercle dont la corde (côté du carré inscrit) est $\sqrt{2}$.

Ainsi, dans le cercle, les radicaux se substituent aux premières puissances pour exprimer les contrastes.

Dans les contrastes simultanés, l'arc du maximum divise par moitié celui du minimum ; dans les contrastes successifs, c'est, au contraire, l'arc du minimum qui divise par moitié celui du maximum.

Ces quatre contrastes nous donnent les cordes constitutives des deux polygones inscrits (triangle et carré), qui seuls produisent des séries illimitées de formes. L'hexagone apparaît comme cas limite; il donne la limite des réseaux possibles à travers les n dimensions. Le pentagone a aussi sa corde comprise entre le diamètre et le rayon. Il procède, il est vrai, du segment de moyenne

raison, qui est plus petit que le rayon; mais il s'obtient, nous allons le voir, d'une manière plus directe au moyen des seuls contrastes précédents.

L'hexagone convexe inscrit se décompose en 6 triangles équilatéraux, groupés autour du centre, et le triangle équilatéral inscrit a pour côté le côté de l'hexagone étoilé. D'autre part, le carré a pour diagonale le diamètre. Carré et triangle synthétisent donc chacun le maximum et le minimum des contrastes qu'ils expriment, mais le triangle équilatéral donne le minimum par rapport à un cercle de rayon double de celui auquel il correspond comme maximum ; tandis que le carré donne le maximum et le minimum simultanés en fonction du même cercle.

La construction de ces deux figures est spontanée et immédiate dans un milieu équilibré. En effet, l'angle droit apparaît comme résultante du mouvement des deux rayons du diamètre primitif qui tournent simultanément. Si, dans nos graphiques, nous sommes obligés de déterminer les perpendiculaires au milieu d'une ligne par les intersections d'arcs de cercle d'un diamètre plus grand que le segment donné, c'est que nous ne sommes pas dans un état d'équilibre parfait. Mais un être absolument équilibré trouverait cette direction médiane immédiatement. Le triangle équilatéral inscrit se trace aussi d'une manière immédiate, quand on prend le rayon pour segment symétrique; il est donné par la corde perpendiculaire élevée dans le cercle sur le milieu du rayon. L'hexagone résulte aussitôt de cette construction, mais il est donné plus directement par le rayon lui-même. Ainsi, le triangle et le carré s'obtiennent sans faire appel aux moyennes géométriques comme cela a lieu pour les polygones rythmiques.

Le triangle équilatéral construit par ce moyen, et non pas médiatement comme diagonale de l'hexagone, répond au processus des solutions imaginaires des moyennes raisons.

Reste le pentagone. Il est susceptible d'une construction très simple. En effet, le côté du triangle équilatéral obtenu comme corde perpendiculaire élevée sur le milieu du rayon évoque la symétrie du rayon primitivement orienté sur un seul sens. Ce rayon devient alors diamètre d'un nouveau cercle. Joignons le centre M de ce nouveau cercle à l'extrémité du diamètre I, perpendiculaire au segment primitif AB, qui constitue le diamètre du premier cercle. De cette extrémité I, décrivons un 3e cercle dont le rayon est égal à l'excès de la droite MI sur le rayon du petit cercle: les intersections de ce cercle avec le cercle primitif donnent la corde du pentagone inscrit.

Cette construction fait intervenir une ouverture de compas autre que le rayon et le diamètre du cercle primitif, bien que ce nouveau paramètre résulte très directement des deux contrastes fondamentaux ; mais aussi le pentagone ne donne plus de formes régulières au delà de la quatrième dimension.

Ainsi, ce qui distingue les polygones expressifs des contrastes, ce qui détermine le pouvoir de construire les formes régulières, c'est la faculté de diviser le cercle sans recourir à des intersections d'arcs de cercles de rayons étrangers aux deux unités primitives données (rayon et diamètre du cercle primitif).

Les formes régulières sont ainsi la manifestation directe du principe des contrastes à travers les divers ordres spatiaux. Elles sont liées étroitement à la fixité caractéristique de l'espace ; elles jalonnent l'étendue homo-

gène, et opèrent le classement en régions identiques nettement distinctes et épuisant la périphérie tout entière. Elles répondent, psychiquement et matériellement, à l'établissement de l'ordre dans les coexistences. Et c'est pour cela que leur étude s'imposait ici de préférence à celle de toute autre relation spatiale.

Les polygones rythmiques

L'algorithme de la graduation donne, dans les formes régulières, celles qui expriment le maximum de l'homogénéité compatible avec la discontinuité angulaire joint au maximum de symétrie autour d'un centre. Mais cet algorithme répond, par sa nature, à la génération continue de la quantité, et c'est pour cela qu'il ne s'applique à la génération des formes par contraste que d'une manière pour ainsi dire médiate.

Aussi, il existe des algorithmes dérivés qui ramènent les hétérogénéités aux homogénéités et le discontinu au continu. Le plus fondamental est celui qui supplée à l'impossibilité de développer directement, sous les modes extensifs de la quantité, la graduation, algorithme dont l'essence est la génération intensive. Cet algorithme adapte l'intensité à l'extensité en établissant une équivalence entre une graduation et une reproduction. C'est dans sa forme la plus élémentaire : la moyenne géométrique entre deux quantités : $AB = K^2$.

Or la moyenne géométrique, prise dans son état le plus typique (la moyenne raison), nous a donné les suites icosaédriques et dodécaédriques. La moyenne raison nous l'avons vu, a pour spécialité de s'établir entre deux

quantités empruntées l'une et l'autre à une même individualité ; elle tire ses éléments de la sommation même, puisqu'elle détermine l'un des facteurs en retranchant la moyenne à l'autre facteur. C'est là son lien avec la génération discontinue caractérisée par les contrastes, et c'est ainsi qu'elle intervient dans les formes régulières. Mais le contraste qu'elle traduit a, nous l'avons vu, un caractère particulièrement subjectif, individuel et finaliste par opposition aux deux contrastes successifs et simultanés, qui portent sur les conditions objectives et universelles du temps et de l'espace. De là *la clôture des suites générées par la moyenne géométrique avec le cycle quaternaire qui épuise la diversité des racines imaginaires, racines qui traduisent la réaction syntétique de l'espace à l'unité intensive de la graduation.*

Mais, si la moyenne géométrique voit son action bornée tant qu'elle est contrainte à s'enfermer dans la discontinuité des éléments linéaires; elle n'en a pas moins un pouvoir réducteur inépuisable de l'hétérogénéité à l'homogénéité. Elle peut ainsi diviser la grandeur indéfiniment, à la condition d'effacer les éléments rectilignes et les angles, et de leur substituer les courbes et les arcs. Et ainsi, c'est la moyenne géométrique qui est le pivot d'un des deux modes fondamentaux de division de la quantité : le mode des rythmes.

La division par contraste découle, nous l'avons vu, de l'indétermination de l'acte diviseur et de la nature même de toute quantité extensive : et c'est naturellement la division binaire qui est le point de départ de tous les contrastes. La division par rythme découle également d'un acte et d'une grandeur inqualifiés. Mais la détermination est apportée ici, non par l'essence de toute gran-

deur, mais par l'essence de tout acte diviseur. C'est encore le nombre 2 qui sera le pivot des rythmes, mais son application n'est plus la même, comme nous allons le voir.

***

La circonférence se prête à la construction des polygones réguliers d'un nombre quelconque de côtés. Les polygones convexes répondent aux fractions commensurables ayant l'unité pour numérateur ; les polygones étoilés à celles ayant pour numérateur un autre chiffre, chiffre qui indique le nombre de tours nécessaires pour revenir au point de départ.

Cette possibilité d'établir sur la circonférence tous les degrés de division aussi bien que sur une droite tient à la continuité de cette ligne. Ce sont les arcs qu'on divise, les cordes s'ensuivent ; l'opération diffère donc essentiellement de celle qui a formé les polygones résultant des contrastes. Mais, au sein de cette possibilité indéfinie, il existe une sélection : certaines divisions sont aisées à tracer ; d'autres exigent des constructions compliquées, ou ne peuvent s'obtenir que par tâtonnements. Donc, il existe, par rapport au cycle, certains actes et certains nombres qui répondent aux divisions naturelles et pour ainsi dire spontanées du cycle. Et, comme le cycle est développable en ligne droite, ces divisions naturelles s'appliquent à toute continuité linéaire à paramètre constant.

Les arcs rythmiques (et médiatement les polygones rythmiques) sont ceux que l'on peut déterminer géométriquement au moyen du compas seulement, c'est-à-dire

par des tracés d'arcs de cercle. Pour obtenir les autres arcs, il faut construire une conique.

Cette propriété des rythmes met en évidence le rapport entre la translation et la rotation prises dans toute leur pureté. Les coniques autres que le cercle résultent au contraire d'un alliage entre la translation et la rotation ; leur courbure n'est pas constante.

La sélection porte ici sur le mode d'opération ; lors qu'il s'agissait des contrastes, elle s'appliquait à des grandeurs définies. Le mode divisionnel résulte donc, ici, non de la nature de la grandeur à diviser, mais de la nature de l'agent diviseur.

***

Cet usage exclusif des intersections d'arcs de cercle se ramène à la construction géométrique des racines d'équations du 1er ou du 2e degré. Or les polygones réguliers sont la traduction géométrique des racines $m^{\text{ièmes}}$ imaginaires de l'unité, racines données par les équations binômes de la forme $x^m = 1$. Les polygones rythmiques répondent aux valeurs de l'exposant m qui permettent de décomposer l'équation $x^m = 1$ en plusieurs autres ne dépassant pas le 2e degré. Construire des polygones rythmiques, c'est donc construire les racines d'une série d'équations du 1e et du 2e degré.

Or les racines des équations du 2e degré s'obtiennent par la construction d'une moyenne géométrique. Et ainsi, comme nous l'avons dit plus haut, c'est cet algorithme dont la fonction consiste à ramener l'hétérogénéité de deux facteurs à l'homogénéité d'un carré, qui est le pivot de toute division rythmique.

Les valeurs numériques de l'exposant m supposé premier (autrement dit les degrés des racines de l'unité), qui sont rythmiques (1), appartiennent tous à l'un des 3 types suivants :

1° Les puissances de 2 (Formule : 2^n) ;

2° Les nombres impairs premiers immédiatement supérieurs à l'une des puissances de 2 (formule : 2^n+1):

3° Les produits d'un nombre du 1er type par un ou plusieurs nombres du 2e type.

On obtient ainsi,entre 1 et 120 :

1er *type* : 2, 4, 8, 16, 32. 64.

2e *type :* 3, 5. 17.

3e *type :* 6, 10, 12, 15, 20, 24, 30, 34, 40, 48, 51, 60, 68, 80, 85, 96, 102, 120.

Donc, entre 1 et 120, 6 nombres du 1er type, 3 du 2e et 18 du 2e. Total : 27 nombres, dont 25 compris dans les 100 premiers nombres.

Il y a 53 nombres rythmiques inférieurs à 1000 ; 208 inférieurs à 1 million. Sur ces 208, 19 appartiennent au 1er type et 5 seulement au 2e, savoir : 3, 5, 17, puis les deux nombres : 257, qui suit 2^8, et 65. 537, qui suit 2^{17}. Cette 17e puissance est immédiatement précédée par un nombre rythmique de la 3e série. En dehors des 5 premiers nombres, 2, 3, 4, 5, 6, c'est le seul cas (jusqu'à 1 million) de 3 nombres rythmiques consécutifs.

On voit que le 2e type est extrêmement pauvre. C'est le premier type qui est fondamental, et dans lequel on doit chercher le principe essentiel du rythme. Et ce principe, c'est la division binaire, la plus simple et la

(1) V. Le Cercle chromatique, par Ch. Henry.

plus immédiate de toutes, se répétant intensivement sur chaque partie obtenue.

M. Ch. Henry considère les divisions rythmiques comme l'expression des changements dynamogènes du vivant et, plus généralement, comme les modes de distributions spontanées de l'énergie. En effet, il y a économie de travail dans tout tracé circulaire, puisque la longueur du rayon demeure invariable et le centre immobile. L'arc de cercle représente ainsi le minimum de travail mécanique dans l'espace. D'autre part, la division binaire indéfiniment répétée est évidemment le minimum de travail intellectuel appliqué à la division et au classement des notions.

La propriété rythmique de la série $2^n + 1$ vient de ceci. Etant donnée une rotation commensurable (ayant 1 pour numérateur), l'excédent du cercle tend à se diviser indéfiniment suivant la série 2^n, puisque le binaire représente la division spontanée par excellence. Dans cette opération, si l'on parvient à rencontrer une fraction égale à la portion restée en dehors de l'opération binaire, on aura un rythme. Or cela ne se peut que pour les nombres qui dépassent seulement d'une unité l'une des puissances de 2 ; et encore faut-il que ce nombre soit premier, sans quoi il serait déjà décomposé en plusieurs autres, et l'identité de cette portion avec les divisions de l'excédent de l'ordre 2^n n'aurait plus lieu.

La propriété rythmique de la 3e série se conçoit ainsi : étant donnée une ou plusieurs divisions de la série $2^n + 1$, on leur superposera toujours aisément la division par 2^n qui est spontanée.

***

Les rythmes se rapportent ainsi aux arcs de cercle et non aux cordes constitutives des polygones. En 3e dimension, ce n'est pas par les polyèdres qu'ils s'expriment, mais par des tracés sur la ligne à courbure constante, l'hélice, et sur la surface à courbure constante, la sphère. Il faudra donc les rechercher parmi les tracés hélicoïdaux décrits à la surface de la sphère. Du reste, il est à remarquer que l'hélice est la trajectoire qu'on rencontre partout dans la nature ; elle s'applique notamment aux corps célestes, et l'on vient de découvrir récemment que les inclinaisons des équateurs planétaires sur les plans des orbites, inexplicables tant qu'on considère le soleil comme fixe, résultent des trajectoires hélicoïdales provoquées par la translation du soleil qui entraînent tout son système dans la direction de la constellation d'Hercule (1).

L'étude des rythmes ne peut trouver ici de plus amples développements : nous espérons la creuser davantage dans des travaux ultérieurs. D'ailleurs, les rythmes dépendent au premier chef du Temps, et paraissent constituer le concours final de l'ordre temporel. Ils n'interviennent dans l'Espace que médiatement; et ici, il y avait lieu seulement de les opposer aux contrastes, qui, eux, tiennent intimement à l'essence de l'Espace.

Les contrastes sont les premières assises de l'organisation spatiale. Simultanés, ils tiennent à l'Espace pur, dont ils affirment et caractérisent la stabilité; successifs, ils le rendent accessible à la division du mouvement et

---

(1) Voir : *Essai de Cosmogonie tourbillonnaire*, par Em, Belot. (Bulletin de la Société Astronomique de France.—Janvier 1907.)

à une influence extérieure du Temps. Par les angles, ils posent, d'une part la distinction des qualités et classent ainsi entre elles les espèces d'un même ordre, et d'autre part, ils superposent les dimensions et établissent une hiérarchie entre les modes d'existence plus ou moins concrets.

Les rythmes, au contraire, au lieu d'affirmer dans l'Espace les distinctions par séparation et hiérarchie, mettent en relief des liaisons entre les existences séparées ; ils établissent des rampes continues qui relient les degrés dimensionnels. Les contrastes successifs manifestent la réaction de l'Espace à l'influence extérieure du Temps. Les rythmes sont la pénétration intime du Temps au sein de l'Espace.

***

Le rythme est, en somme, la réaction opposée par la continuité à la discontinuité inhérente à toute division. L'aisance qu'il apporte dans le passage d'une fraction à l'autre rétablit, dans le mouvement et dans la conscience la continuité brisée par la division dans l'étendue. Le rythme transfère ainsi la continuité de la grandeur à l'acte, de la passivité à l'activité. Il fait éprouver et percevoir comme simultané ce qui, comme excitant, est successif : les parties objectivement séparées deviennent pour lui subjectivement unifiées. Cela s'accomplit, non par un retour à l'homogénéité confuse et inqualifiée, mais au moyen d'une unité qualifiée, expressive, significatrice. Le Rythme, c'est un Verbe pénétrant la quantité pour y résoudre le chaos, une action du Logos qui fait luire la Lumière à travers la

matière pour la rendre intelligible et pour réaliser en elle les virtualités idéales.

Le Rythme, c'est donc l'ingérence du nombre qualifié dans la Grandeur continue et indéterminée ; c'est la pénération de la qualité dans la quantité ; c'est l'élimination de la résistance opposée par la discontinuité de la matière à l'assimilation animique intellectuelle.

Rythmes et Contrastes sont ainsi les deux pôles de l'existence quantifiée dans le Temps et dans l'Espace. Colonnes d'Hercule de la Finalité qui séparent l'Océan de la Quantité de l'empire de la Qualité. Nœud des mathématiques et de l'esthétique, ils indiqueront à la science les mesures optima cachées dans les variations arbitraires de la Quantité, et lui donneront la clef des problèmes inextricables ; ils régénéreront l'art en lui découvrant les secrets des proportions idéales.

C'est enfin l'union des Rythmes et des Contrastes qui résout par la Vie l'antinomie du mouvement et de l'inertie, de l'être et du devenir, et qui accomplit en elle l'interchange réciproque du Temps et de l'Espace, et les synthétise dans l'harmonie d'une vivante Beauté (1).

---

(1) Cf : La 2e partie de notre ouvrage : La Synthèse concrète, notamment le ch. VI.

SECTION IV

LES RELATIONS SPATIALES

Nature des Relations spatiales

Nous avons défini l'Espace, indépendamment de toute représentation sensible et de toute subjectivité mentale, comme étant *l'universel des conditions de coexistence d'une pluralité d'individus et d'exclusion d'une pluralité de formes en un même individu*. Toutes les relations spatiales doivent découler de ce double caractère, dont la résultante est la *persistance*, tandis que la *variation* est la résultante des caractères essentiels du Temps. — *L'Individualité est ce qu'il y a d'exclusif dans une détermination d'existence*. C'est cette exclusion qui nécessite pour la diversité des formes soit le Temps, soit l'Espace.

---

(1) On objectera que plusieurs formes peuvent se superposer ou se combiner en un même individu. Mais cette superposition ou cette combinaison constitue alors une nouvelle forme, qui est la synthèse des formes plus abstraites qui la composent. Et cette synthèse n'est possible que si les formes composantes ne sont pas

Ce qui assimile les individus malgré leur exclusivisme, c'est la Quantité. La quantité compatible avec cet exclusivisme, c'est l'Intensité. L'Intensité est la quantité intériorisée dans l'individu. Sous cette forme, la Quantité ne peut faire cesser l'isolement individuel. Pour que l'Individuel reflète l'Universel, la Quantité doit s'extérioriser ; elle devient alors Grandeur et Nombre. Comme Grandeur, elle développe l'unité individuelle vers l'expansion totale ; comme Nombre, elle pluralise l'Individuel. L'Individuel n'atteint l'Universel que par la synthèse de ces deux développements. La Grandeur devient Durée dans le Temps, Etendue dans l'Espace ; le Nombre devient Suite dans le Temps, Ensemble dans l'Espace.

Ce qui différencie les individus malgré leur pluralité, c'est la Qualité. Le caractère universel des essences ne peut se conserver en mode d'existence individuelle que par la pluralité d'individus de même qualité ; et il faut que la Qualité soit extériorisée pour que cette pluralité constitue une totalité. Elle s'exprime alors par une Distribution et par une Forme. La Distribution devient Ordre dans le Temps, Situation dans l'Espace ; la Forme devient Mode dans le Temps, Figure dans l'Espace.

Le Temps et l'Espace apportent ainsi le complément d'homogénéité et d'hétérogénéité nécessaires pour relier les individus complètement dissemblables, et pour distinguer les individus complètement semblables. Ils

---

contradictoires entre elles. Sinon, ces composantes demeurent distinctes, et ne peuvent affecter un même individu que successivement.

sont l'un et l'autre caractérisés par les expressions les plus abstraites et les plus générales de la Quantité et de la Qualité. Vis-à-vis du milieu universel constitué par le Temps et l'Espace, l'autonomie et l'hétéronomie des individus se caractérisent par des fonctions inverses au moyen de la Figure et du Mode s'opposant à la Succession et à la Collection, au moyen de l'Ordre et de la Situation s'opposant à l'Etendue et à la Durée. Le Nombre et la Grandeur réunis engendrent la Mesure, et par là intègrent dans les individus une quantité tirée du Temps et de l'Espace. La Forme et la Distribution réunies différencient, au sein du Temps et de l'Espace, une qualité individualisée.

Le Temps et l'Espace accordent la pluralité des individus et la diversité des formes avec l'unité d'existence et la pureté d'essence ; ils sont les racines virtuelles de l'univers, qui doit recevoir son accomplissement par la réunion de tout l'Individuel et réaliser ainsi la synthèse du Kosmos.

***

L'Etendue, dans son mode le plus élémentaire, c'est le Segment ou la Distance, suivant qu'on l'attribue à un individu ou à la région de l'espace qui sépare les individus. La Situation, dans son mode le plus élémentaire, c'est la Direction ou l'Orientation, suivant qu'on la considère comme un caractère propre à l'individu ou comme la position assignée à l'individu dans l'espace. Segment et Direction sont synthétisés par la notion de Vecteur. La Distance et l'Orientation (qui sont équivalentes au Segment et à la Direction) expriment les deux principes universels qui sont la source de

toutes les relations d'espace : la Translation et la Rotation.

Nous avons défini la Translation et la Rotation en fonction de l'existence individuelle (c'est-à-dire en fonction de ce qu'il y a d'exclusif dans une détermination d'existence) : la Translation répondant aux modifications d'un sujet qui fonctionne comme unité élémentaire et indivisible; la Rotation, répondant aux modifications d'un sujet qui fonctionne comme unité synthétique.

Il en résulte que, dans la Translation, la relation entre individus a le caractère de réciprocité; dans la Rotation, celui de subordination. De là une division des figures géométriques en deux classes : les figures périphériques et les figures centrales.

Les périphéries, les contours courbes ou brisés représentent l'influence du principe de rotation dans un élément de translation ; les rayonnements, les axes, les plans de symétrie, les éléments bissecteurs, médians, perpendiculaires, les lieux de concours représentent l'influence du principe de translation dans un élément de rotation,

La relation la plus simple qui existe entre une figure périphérique et une figure centrale est la perspective, relation dont les formes régulières offrent le cas extrême où la rotation prédomine. Dans la perspective, les figures planes (cas de la périphérie où la translation est indépendante de la rotation) sont des sections d'une figure centrale projetante, à laquelle elles sont subordonnées. Cette relation commune vis-à-vis de la projetante, établit des relations réciproques entre ces diverses sections.

La Translation possède cependant en elle-même un principe centralisateur ; mais ce principe se manifeste virtuellement, comme acte et comme chose : il consiste dans l'unité de direction. Il en résulte que plusieurs figures centrales se subordonnent à leur tour à une seule figure périphérique. Cette subordination réciproque entre les centres et les périphéries est manifestée dans la perspective par la constance du rapport anharmonique , qui s'étend, d'une part, à toutes les transversales d'un faisceau, et d'autre part, à tous les faisceaux passant par les mêmes points d'une transversale.

Une réciprocité d'ordre supérieur s'établit entre deux figures composées de centralisation et de périphérie, celle qui unit les éléments centraux de l'une aux éléments périphériques de l'autre, et réciproquement. Cette réciprocité,dont l'état le plus simple,est manifestée dans [un faisceau coupé par une transversale, est le germe des transformations corrélatives.

***

Dans ces relations, translation et rotation restent distinctes ; dans la construction dimensionnelle, elles s'identifient pour ainsi dire, et c'est pour cela que le dimensions donnent l'expression la plus explicite de l'essence de l'Espace.

Isolées, la translation et la rotation sont deux principes polaires du développement spatial. La translation dans son état élémentaire se réduit à la ligne ; elle établit la 1re dimension. Elle est le fondement des contrastes, puisqu'elle substitue intégralement les relations les unes

aux autres. Elle introduit les contrastes dans la rotation au moyen de l'angle, et de cette combinaison résulte la 2e dimension.

Mais ce n'est pas dans le cercle, qui représente ce principe dans la 2e dimension, qu'il faut placer l'origine de la rotation. Son essence ne provient pas du rayon; car rien dans le rayon, considéré comme segment, ne permet de concevoir une pluralité de directions et ne fournit le germe de la rotation. Le cercle a sa genèse véritable dans la section de la sphère par l'élément de translation à deux dimensions, le plan. A son tour, la sphère à trois dimensions provient d'une section euclidienne de la sphère à quatre dimensions, et ainsi de suite.

La rotation implique la totalité des directions possibles. La ligne bipolarisée de la 1re dimension n'est pas son germe ; c'est au contraire la projection du cercle sur son diamètre. Le résidu ultime de la rotation, aboutissant à sa dissociation, est l'opposition du positif et du négatif. C'est dans l'espace homogène supérieur, indivisé en dimensions et dont les espaces de toutes dimensions sont des sections plus ou moins abstraites, que réside le principe de rotation.

On comprend que la rotation, relation d'une universalité d'antécédents (les directions) à un seul conséquent (le centre), ne peut provenir de la dualité, mais, au contraire, que celle-ci est son état d'épuisement ; et ainsi, la polarité binaire, qui se manifeste comme une des lois fondamentales de l'univers, se révèle comme résultant d'une restriction, comme un principe de distinction extrême, et non comme un principe de développement primordial. Mais, par la dis-

tinction qu'il établit, il prépare la transformation de la totalité indivise en unification complexe et synthétique.

***

Revenant à la géométrie, si l'on considère la rotation comme originaire de l'espace de l'ordre le plus élevé au lieu de la faire sortir de l'angulaison, on fait disparaître l'anomalie apparente qui exige pour la rotation une dimension de plus que pour la translation ; et nous avons vu que les malentendus soulevés par les géométries non euclidiennes venaient de ce qu'on voulait faire dériver l'angle de la droite et la rotation de la translation, au lieu de les établir comme deux principes du même degré.

L'expression de cette polarité, qui marque les deux extrémités de l'échelle dimensionnelle, l'une fixée par le point (unité élémentaire inétendue, indivisible et multipliable), l'autre, occupée par l'immensité globale (illimitée, divisible et non multipliable), nous est donnée, avec sa loi de développement et de combinaison, par le binôme $(1-1)^n$, qui est la loi de la série tétraédrique, et à laquelle se rattachent également les deux autres séries illimitées de formes régulières : l'hexadérique et l'octaédrique.

Cette polarité explique encore pourquoi la géométrie métrique, qui s'appuie sur la translation, est surtout constructive et étudie les solides en se basant sur les figures planes, tandis que la géométrie projective, qui s'appuie sur la rotation, explique plus simplement les combinaisons à 3 dimensions, et découvre dans un même solide l'origine commune de plusieurs figures planes. Tel le cône si riche en propriétés projectives, qui appar-

tiennent au cercle, à l'ellipse, à l'hyperbole, à la parabole et au système de deux droites.

De même, les propriétés projectives (1) d'un système de 6 points ou de 6 droites dans le plan, caractérisées par les hexagrammes de Pascal et de Brianchon, ne paraissent liées à aucun principe bien net en 2e dimension ; la synthèse se prépare en 3e dimension au moyen d'une forme spéciale de la surface du 3e degré, celle qui a un point nodal ; mais les autres formes de cette surface donnent d'autres combinaisons jouissant des propriétés de l'hexagramme. Enfin, M. Jouffret établit la synthèse complète de ces diverses combinaisons en considérant la surface du 3e degré comme section de la figure très simple formée par 6 points répartis dans les 4 dimensions, nommée l'hexastigme. Et par là, M. Jouffret découvre le principe de l'Involution tout entière : le sénaire à 4 dimensions. M. Jouffret remarque encore que le principe des figures homologiques dans le plan est donné par la relation de 5 points dans l'espace à 3 dimensions ; enfin, que le principe du rapport anharmonique sur une ligne est donné par la relation de 4 points dans l'espace à 2 dimensions. On remarquera que ces relations fondamentales font intervenir un point de plus que les formes régulières de la série tétraédrique, autrement dit, un point de plus qu'il n'est nécessaire pour déterminer un élément à n dimensions.

***

La Translation se rapporte primitivement à la quantité

(1) V. Jouffret, *Mélanges de géométrie à 4 dimensions*, p. 147 et suiv.

de l'espace et à l'action. En effet, en elle, aucun point ne demeure fixe : l'élément commun de comparaison ne peut être qu'un facteur dynamique et les relations entre les états s'expriment par des différences d'intensité. La Translation est la base des relations métriques. La qualité lui est apportée par les Nombres, et surtout, probablement par la fonction exponentielle.

La Rotation se rapporte primitivement à la qualité de l'espace et aux idées. Elle ne connaît pas d'intensité, puisqu'elle ne franchit aucune étendue, mais elle distingue des directions diverses. Elle ne peut s'évaluer en quantité que comme rapport entre deux translations. Dans ce rapport, les éléments de translation peuvent isolément être nuls en grandeur ; c'est le qualificatif numérique exprimé par le rapport qui définit la direction. Là est le principe du calcul différentiel. Si les quantités comparées sont considérées comme de véritables grandeurs, il faut les exprimer en fonction d'une unité commune, et l'on a les fonctions trigonométriques. Le Nombre joue donc, vis-à-vis de la translation, un rôle qualitatif, et, vis-à-vis de la rotation, un rôle quantitatif.

L'antinomie entre la Translation et la Rotation, exprimée dans son aspect contradictoire par les géométries non enclidiennes, se trouve résolue par les Dimensions. Et dans le schéma dimensionnel l'union de ces deux principes se manifeste dans sa plus parfaite harmonie par les figures où domine le plus la congruence, c'est-à-dire par les formes régulières et par les réseaux.

Les formes sphériques suppriment la distinction des éléments et éliminent toute translation. Le parallélisme supprime toute fusion des éléments et élimine toute

rotation. L'homogénéité obtenue en alliant la Rotation et la Translation est réalisée au maximum par la congruence géométrique. Or les formes régulières réalisent cette congruence au maximum, car elles l'étendent aux éléments de tous les degrés qui les composent et à leurs relations avec leurs centres de tous degrés.

La formule de la congruence entre deux figures exprime l'égalité entre éléments homologues SA = SA', SB = SB' ; mais, dans les formes régulières, on a de plus SA = SB = K, (K désignant une constante S, le centre commun).

Les formes régulières réalisent ainsi le maximum de synthèse possible au moyen d'éléments de translation, car tous les éléments sont égaux et ils demeurent distincts en se subordonnant de la même manière à un centre unique et à une série de centres intermédiaires. (Dans les réseaux, la subordination est la même, mais par rapport à une infinité de centres.)

CHAPITRE I

Les Relations élémentaires

L'Homothétie et la Similitude

La première altération de cette synthèse commence à émanciper la translation en créant une variété entre les distances au centre et entre les éléments homologues : c'est l'homothétie.

L'homothétie réduite à son schéma fondamental comprend un angle fixe coupé par des parallèles ; elle consiste dans la valeur constante des rapports de contenance ou quotients, déterminés par ces parallèles. Elle fournit des quotients constants de valeur K, K_1, K_2

1° Les quotients d'un élément rayonnant ou périphérique par son homologue :

$$\frac{SA}{SA'} = \frac{SB}{SB'} = K$$

2° Les quotients homologues d'un élément périphérique par l'élément rayonnant correspondant :

$$\frac{SA}{AB} = \frac{SA'}{AB'} = K_1$$

3° Les quotients homologues d'éléments rayonnants entre eux.

$$\frac{SA}{SB} = \frac{SA'}{SB'} = K_2$$

Ces diverses relations s'entraînent réciproquement. La symétrie entre les deux côtés de l'angle au centre caractéristique des figures régulières est ici rompue mais l'égalité des angles homologues subsiste par le parallélisme des éléments périphériques homologues, et la situation sur un même rayon des éléments rayonnants homologues.

Si l'on juxtapose des triangles isocèles égaux par coïncidence de leurs côtés latéraux, on obtient une figure inscrite dans le cercle, et qui est de la famille des formes régulières.

Si l'on construit une série de triangles semblables juxtaposés en joignant les extrémités des rayons voisins faisant des angles égaux, mais étant de longueur croissante, le contour ainsi obtenu s'inscrit dans une spirale. Les sommets du contour expriment les puissances entières d'une quantité imaginaire. Le contour s'ouvre dans le sens de l'angle périphérique le plus grand, et d'autant plus que l'angle au centre est plus grand. Quand un angle périphérique et l'angle au centre sont droits en même temps, le segment a une longueur infinie. Quatre semi-tangentes à un cercle tournant dans le même sens, et menées des extrémités de deux diamètres perpendiculaires répondent ainsi au cas limite d'une juxtaposition de triangles semblables ayant deux angles droits. C'est la figure du Swastika, symbole très riche en significations, mais qui par là se rattache à l'homothétie.

Un autre cas limite se présente quand l'angle au centre tend vers zéro : les segments infiniment petits se confondent alors avec la spirale, et par là avec la direction des tangentes à cette courbe. Or ces directions font

avec les rayons vecteurs un angle constant. C'est alors la spirale logarithmique, et cette courbe exprime entre autre chose l'essence de la similitude par juxtaposition rayonnante. Les diverses spirales répondent à des altérations du rapport de similitude suivant des lois diverses, tandis que la spirale logarithmique conserve la constance de ce rapport. Les spirales traduisent donc la variation croissante (ou décroissante) de l'intensité de rotation : elles répondent par là à la force centrifuge. Les nébuleuses nous montrent le lien de la forme sphérique à la spirale ; et, dans le règne animal, après les Rayonnés aux formes régulières, viennent les Gastéropodes avec leurs coquilles en spirales.

***

L'Homothétie est le principe géométrique qui engendre le rapport métrique de Similitude, comme les formes régulières sont le principe géométrique de la congruence entre figures. Congruence et Similitude font abstraction de cette situation primitive, et ne comparent que les figures en les plaçant d'une façon quelconque. Mais les déplacements n'empêchent pas le centre d'homothétie de persister et d'être le pivot d'une rotation toujours possible, qui ramènera les figures en situation d'homothétie. Le centre d'homothétie, nommé alors centre de similitude, est le point qui considéré tour à tour comme appartenant à chacune des figures demeure son propre homologue. Le rapport de ses distances à n'importe quel couple de points homologues est le rapport constant K de similitude de figures. Il se trouve à l'une des intersections S de deux cercles, menés chacun par un couple

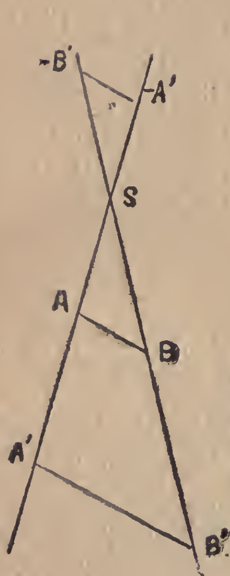


Schéma de l'Homothétie

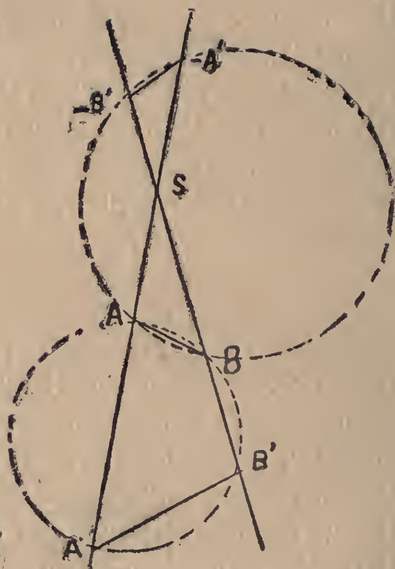


Schéma de l'Inversion

de points homologue AA', BB' et ayant pour seconde intersection le point de concours I des droites homologues correspondantes AB, A'B'.

Dans la Similitude, l'intensité de qualification d'un être varie seule ; la qualité reste la même. La Similitude entre figures implique ainsi que les données angulaires homologues soient égales, et que les données linéaires homologues soient proportionnelles. S'il n'existe dans la détermination d'un type de figures qu'une seule donnée linéaire, celle-ci ne peut donner lieu à aucun rapport, et toutes les figures du type sont semblables. Tels sont : le cercle, la parabole, la lemniscate, la spirale d'Archimède.

Appliquant ce principe aux genèses biologiques, on peut penser que les espèces, divisées en de nombreuses variétés différant par les proportions, résultent d'un concours d'actions très complexes dont les rapports d'intensité ont varié beaucoup.

L'Inversion

L'Inversion correspond à l'opération algébrique opposée de celle de l'Homothétie : au lieu de la constance d'un quotient, c'est la constance d'un produit. La formule de l'Homothétie étant $\frac{SM}{SM'} = K$, celle de l'Inversion est $SM \times SM' = K$. Ce sont les deux voies régressive et progressive de l'algorithme de la reproduction.

Dans la Similitude, les deux termes homologues croissent ou décroissent en même temps ; dans l'Inversion,

l'un croît quand l'autre décroît et vice versa. L'identité des termes dans la Similitude réalise l'égalité ; dans l'Inversion, elle donne la moyenne géométrique. Cette moyenne se nomme puissance d'inversion. C'est la racine carrée de la constante K. Si les deux facteurs sont de même signe, cette racine est réelle et la puissance est positive ; s'ils sont de signe contraire,la racine est imaginaire et la puissance est négative.

Tandis que le schéma de l'Homothétie est un angle coupé par des parallèles, celui de l'Inversion est un angle coupé par des antiparallèles. Quand la puissance est positive, les points homologues d'un rayon sont du même côté du pôle d'inversion S : l'ordre est SMM' ; quand elle est négative, le centre S les sépare : l'ordre est MSM'.

Géométriquement, l'Inversion positive s'obtient en menant du pôle d'inversion un faisceau de rayons. On choisit un rayon de longueur $\sqrt{K}$, et tous les cercles tangents à ce rayon en son extrémité couperont les autres rayons suivant la relation SM × SM' = K. Le pôle d'inversion S est extérieur à ces cercles.

Quand l'inversion est négative, on mène par S une droite MM' dont S est le milieu et dont chaque moitié a pour longueur $\sqrt{K}$; on trace tous les cercles ayant leur centre sur la perpendiculaire à cette droite élevée en S sur MM' et passant tous par MM' ; toutes les cordes passant par S donneront la relation SM × SM' = — K La demi-corde, perpendiculaire à l'axe des centres des cercles et commune à tous ces cercles, corde minimum de celles qu'on peut mener par S, donne la moyenne géométrique.

Les deux tangentes (pour + K), la corde minimum

(pour — K) forment donc un pivot, un élément centralisateur de la relation d'inversion.

***

L'Inversion conserve les angles en changeant leur orientation ; il en résulte « la similitude des triangles infiniment petits, de sorte que deux figures inverses l'une de l'autre sont deux figures semblables dont le rapport de similitude varie d'un lieu à un autre ». L'Inversion représente donc le devenir, la transformation de la similitude ; et ainsi, la relation d'*intus ad extra*, qui oppose la division d'un tout à la multiplication d'un élément (inversion) n'est autre chose que la synthèse de toutes les étapes de la croissance marquées par la Similitude. La constante d'inversion est la norme de cette variation, et les diverses valeurs qu'elle peut prendre traduisent la rapidité plus ou moins grande des variations de la Similitude ; elle marque en même temps le cas moyen commun des combinaisons équivalentes de tous les couples.

L'Inversion transforme les propriétés métriques de la façon suivante ; AB devient : $\frac{A\ B}{S\ A \times S\ B'}$, autrement dit, à toute grandeur, on substitue le rapport de cette grandeur à l'inversion déterminée par ses deux termes pris comme homologues par rapport au centre S.

L'Inversion transforme la translation en rotation; car toute droite a pour inverse un cercle, et une droite peut avoir pour inverse un cercle quelconque de son plan en prenant pour centre d'inversion l'extrémité du diamètre perpendiculaire à la droite. Mais, hors ce cas où

le cercle passe par le centre d'inversion, l'inverse du cercle est un autre cercle. Il devient son propre inverse si le centre d'inversion coïncïde avec le centre du cercle.

Le centre d'inversion est d'un ordre plus virtuel et plus élevé qu'un centre de figure, car c'est le centre d'un système de figures dont il règle la subordination à un même principe. Et ce principe consiste à relier les deux zones de la quantité séparées par l'unité, l'une, domaine de la division intérieure, ayant pour limite le continu, l'autre, domaine de la multiplication extérieure, ayant pour limite l'infini.

L'Involution

Rabattons sur une droite appelée base le faisceau qui règle une inversion. Tous les points homologues formeront sur cette droite des couples satisfaisant à la relation d'inversion. On dit alors qu'ils forment une Involution. L'Involution s'étend à des figures de toute espèce, mais c'est toujours en se rapportant à la droite involutive qu'on évalue cette relation.

Le pôle d'inversion devient point central de l'involution. Il y a sur la base deux points doubles (c'est-à-dire deux points qui sont leurs propres homologues). Ces points répondent au rabattement des tangentes ou de la corde minimum ; ils sont réels ou imaginaires, suivant que la puissance est positive ou négative, et donnent la moyenne géométrique qui caractérise la constante K.

***

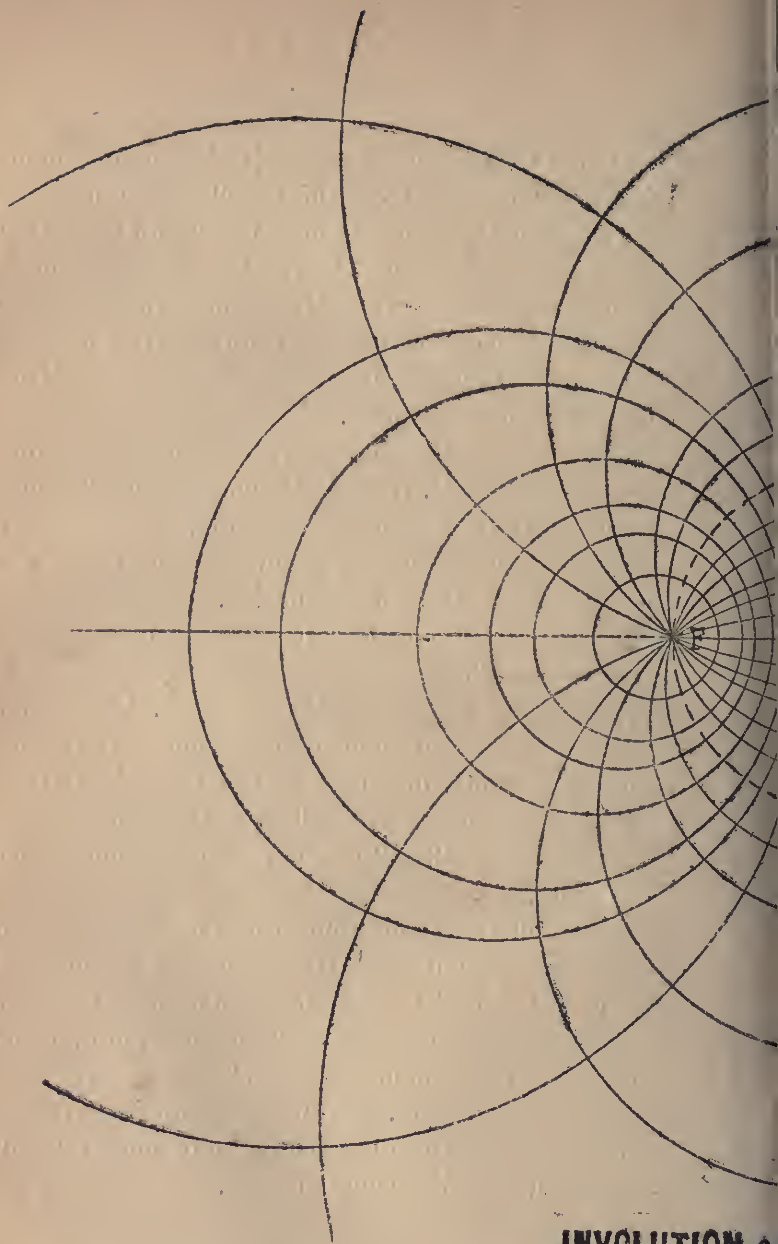
Quand la puissance est positive,les points homologues ne sont pas séparés par le pôle,les couples ne se chevauchent pas,mais ils sont tous compris les uns dans les autres, de sorte que les cercles décrits sur chaque couple pris comme diamètre s'enveloppent tous ; ils ne sont pas concentriques,mais forment un faisceau de cercles du 1er genre. La construction est symétrique des deux côtés du pôle S.

Chacun de ces cercles représente ainsi le rayonnement d'un couple. Les points doubles sont les points limites du faisceau, c'est-à-dire que tous les centres des cercles (ou des couples) sont en dehors du segment compris entre les points doubles.

Ces points sont comme les gardiens du seuil d'une zone qui se laisse pénétrer par le rayonnement des couples mais jamais par leurs centres. Les circonférences se resserrent donc de plus en plus dans la région voisine du pôle (ou point central d'involution), sans jamais se croiser avec celles de la région symétrique, tandis qu'elles s'écartent de plus en plus du côté de l'infini.

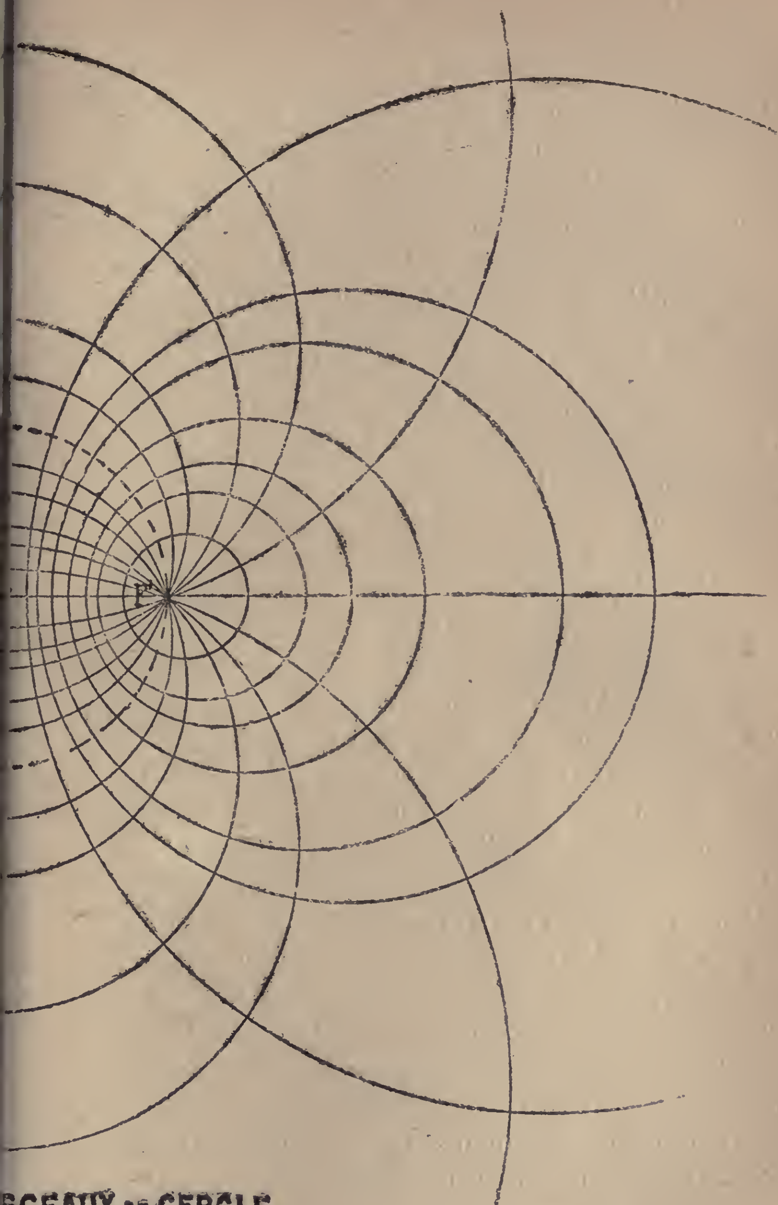
Le cercle de rayon infini, celui décrit sur le couple formé par le point central S et le point à l'infini, est la perpendiculaire à la base élevée en S ; c'est l'axe radical du faisceau, c'est-à-dire le lien des points d'égale puissance par rapport aux cercles symétriques deux à deux du faisceau. Et tous les cercles du faisceau coupent à angle droit le cercle décrit du point central S, sur le segment des points doubles.

***



INVOLUTION à

Faisceau du 1er Genre ayant ses centre
Faisceau du 2ème Genre ayant ses centres
F F' sont les points limités du 1er Genre et les points fondamentau



SCEAUX DE CERCLE

l'axe horizontal. (Involution positive)
l'axe vertical. (Involution négative)
faisceau du 2ème Genre. — S est le centre des deux involutions.

Quand la puissance est négative, les points homologues de chaque couple sont situés de part et d'autre du point central S ; tous les couples, au lieu de s'envelopper, se chevauchent. et par conséquent, les cercles ayant pour diamètre les segments de chaque couple se croisent. Ils forment un faisceau du 2e genre ayant pour corde commune et pour axe radical la perpendiculaire à labase élevée de S ; et leurs points d'intersections, points fondamentaux du faisceau,sont situés,de part et d'autre de S,à une distance égale à la puissance d'inversion. Ce sont les points doubles imaginaires de l'involution.

Ici, pas de zone interdite. Ce n'est plus une suite d'enveloppements se densifiant contre l'axe radical et se dilatant vers l'infini.C'est un entre lacs universel qui forme un fuseau d'arcs de cercles se densifiant autour de l'axe radical. Le cercle construit sur le segment des points doubles appartient au faisceau : c'est celui de rayon minimum ; dans le faisceau de 1er genre, au contraire, le cercle construit sur le segment des points doubles ne fait pas partie du faisceau, et le cercle de rayon minimum se réduit aux points limites. Dans le faisceau du 1er genre, les rayons de tous les cercles qui déterminent les couples sont donnés par les tangentes menées de leurs centres au cercle des points doubles ; dans le faisceau du 2e genre, ils sont donnés par la distance de ces centres aux points fondamentaux, et si l'on joint les deux points homologues d'un couple à l'un des points fondamentaux, ces deux droites sont perpendiculaires.

***

Ainsi, l'involution est liée étroitement à l'angle droit de deux manières différentes. Dans l'involution à puissance positive (faisceau du 1er genre), l'angle droit enveloppe le cercle des points doubles : un de ses côtés glisse comme tangente, tandis que l'autre, de longueur constante, décrit le cercle des points doubles dont il constitue le rayon. Dans l'involution à puissance négative (faisceau du 2e genre), l'angle droit se balance autour de son sommet. Ici, le point double, au lieu de tourner autour du centre d'inversion, sert de pivot, et l'angle oscille autour de l'axe radical.

C'est donc le contraste simultané, principe des dimensions, qui se manifeste ici, non pas fixe, mais réalisant de deux manières différentes le mouvement de rotation nécessaire pour relier les contrastes et constituer l'espace dimensionnel. On peut rapprocher la révolution périphérique de l'angle droit, dans l'involution à puissance positive, du principe du carré et de la série hexaédrique, et sa rotation dans l'involution à puissance négative, du principe de la croix perpendiculaire et de la série octaédrique.

L'involution marque la trace sur une droite (et plus généralement, l'empreinte sur un élément de translation pure) du principe des contrastes maximum simultanés ou de la perpendicularité soumis au principe de rotation.

L'axe radical perpendiculaire à la base d'involution répond, dans les deux cas, au couple formé par le centre d'involution, et son conjugué, qui est le point à l'infini. Et ainsi, la base et l'axe radical établissent au sein de la perpendicularité mobile, qui détermine tous les couples, une perpendicularité fondamentale qui régit tout le système.

L'involution à puissance négative répond à un levier du premier genre, coudé ; le point d'appui marqué par le point central sépare la puissance et la résistance, marquées par les points homologues de chaque couple. L'involution à puissance réelle répond à un levier du 2e ou du 3e genre, le point d'appui se trouvant à l'une des extrémités.

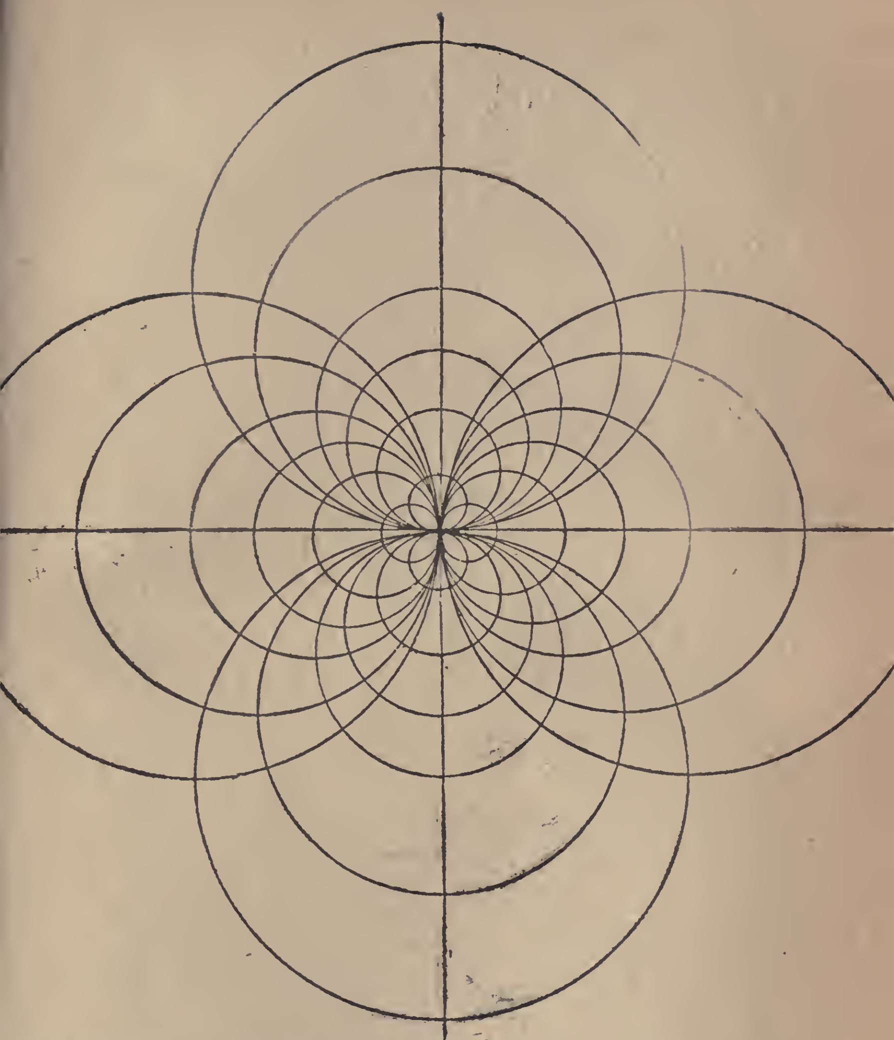
***

Prenant la puissance donnée pour unité, l'involution exprime, par chacun de ses couples, la liaison entre deux zones séparées par l'unité : l'une, limitée par zéro, l'autre, par l'infini. L'Inversion exprime une des lois d'opposition les plus fondamentales, celle du dedans au dehors, du convergent au divergent, de la division à la multiplication, source de l'opposition de l'infini et du continu. L'Involution exprime l'Inversion au sein de la première dimension, et les faisceaux de cercles traduisent l'essence de ce principe en donnant le schéma le plus simple de son développement à travers l'espace.

Il y a deux cas extrêmes où la puissance d'inversion ne peut être prise pour unité, c'est lorsqu'elle a une valeur infinie ou nulle.

Pour une puissance infinie, l'involution positive devient un carré infini ; l'involution négative, une croix à branches infinies. Ce sont les racines des développements hexaédriques et octaédriques ; c'est l'affirmation du schéma dimensionnel dans toute sa plénitude et sous sa double forme périphérique et axiale.

Pour une puissance nulle, les deux faisceaux conjugués s'identifient et deviennent d'un genre intermédiaire ; ils constituent 4 groupes de cercles ayant leurs



FAISCEAU MIXTE (Involution de puissance zéro)

centres sur l'un ou l'autre des deux axes et tous tangents à l'autre axe au point central. Ici, c'est le principe dimensionnel s'incarnant pour ainsi dire dans la rotation,et chaque axe émettant des ondes circulaires croissantes jusqu'à l'infini. Les cercles s'intersectent suivant les quatre bissectrices, et dessinent ainsi une nouvelle croix diagonale formée par les nœuds vibratoires.

Dans son schéma le plus élémentaire, cette figure constitue le trèfle à 4 feuilles, et peut-être la superstition qu'on y attache et l'usage fréquent des rosaces quadrilobées dans l'art ogival tiennent-ils au profond symbolisme de cette figure !

Hors ces deux cas, la symétrie est binaire, et autour des deux axes perpendiculaires un faisceau du 1er genre a pour conjugué un faisceau du 2e genre, l'axe radical de l'un étant la base de l'autre.

***

Dans l'involution positive, l'onde partant du point limite sur le cercle unité s'amplifie de plus en plus à mesure que son centre s'éloigne ; elle tend vers le contact avec l'onde symétrique, mais ce contact s'accomplit par les faces convexes ; les deux ondes tendent à s'accoler en se tournant le dos ; elles regardent vers l'infini comme des réflecteurs convergents ; leur axe radical est un appui pris en recul pour bander,par une gerbe de ressorts serrés et divergents autour de cette tige comprimée comme par un laminoir, la tension qui fait face aux émanations venant de l'infini. La zone

interdite aux centres est le domaine s'étendant de zéro à l'unité ; elle agit comme force répulsive, refoulant la vibration initiale jusqu'aux points limites situés sur l'unité. Celle-ci part d'une amplitude nulle : c'est la tension opérée entre les deux points limites par la zone interdite qui provoque l'impulsion.

Dans l'involution négative, au contraire, les points limites devenus fondamentaux jouent le rôle de nœud, et la vibration initiale part du centre, et remplit d'un coup la zone comprise s'étendant jusqu'à l'unité. La dualité se manifeste,non plus comme impulsion motrice, mais, au contraire, comme fixation. Au lieu d'une gerbe divergeant autour de l'axe radical, il se forme ici un fuseau dense d'arcs convergeant autour de l'axe radical. Ici, les ondes symétriques se regardent et se complémentent ; elles vont les unes vers les autres en enfermant dans une trame de plus en plus serrée la région fuselée du pivot,tandis qu'elles s'écartent vers l'infini,regardant toujours le centre. Enfin, les arcs infinis s'accolent sur l'axe radical par leurs côtés concaves.

L'ensemble des deux faisceaux conjugués montre les deux manifestations opposées de l'expansion circulaire adaptée au contraste maximum simultané des dimensions.Il y a là comme deux forces complémentaires qui s'équilibrent : tels le magnétisme et l'électricité. Et sans doute, ces relations géométriques sont les hiéroglyphes de quelque profond arcane des lois fondamentales de l'univers. Et nous n'avons examiné pourtant que les manifestations élémentaires de l'involution et de l'Inversion,sans remonter aux principes plus généraux auxquels elles se rattachent..!

La Proportion harmonique

La similitude s'exprime par l'égalité de deux quotients, de telle sorte que, si on divise l'un par l'autre, le produit est égal à l'unité. Changeons cette unité de signe et nous avons la Proportion Harmonique

$$\frac{AC}{AD} = \frac{-BC}{BD}$$

Supposons donc un angle de sommet S, ayant sur l'un des côtés les points A et B, sur l'autre C et D, de telle sorte qu'en rabattant l'un des côtés sur l'autre, C tombe entre A et B, et D au delà de B, nous aurons une division de 4 points sur une droite, qui pourra, dans certains cas, donner l'égalité des rapports

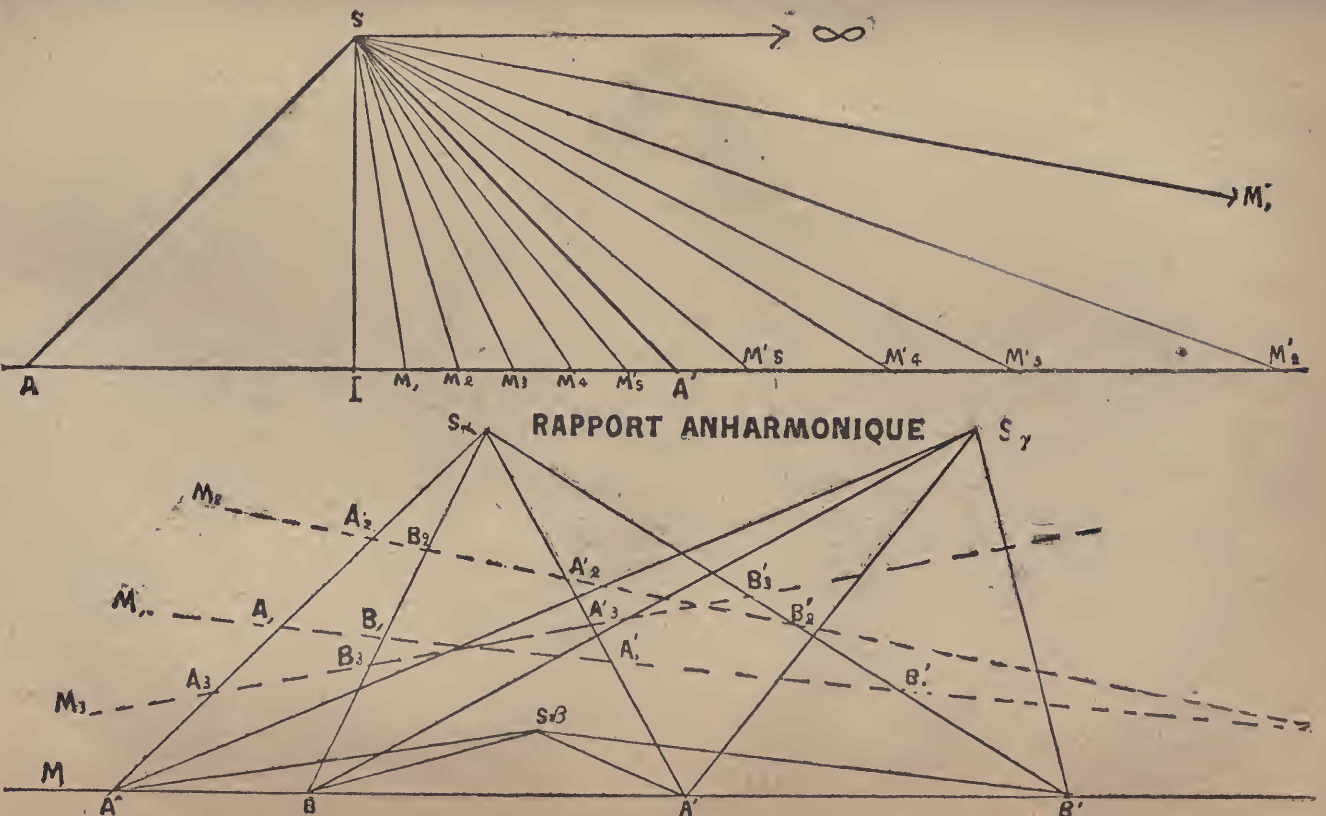
$$\frac{AC}{AD} = \frac{-BC}{BD}$$

En ce cas, A et B sont conjugués harmoniques par rapport à C et D et réciproquement. On peut exprimer la Proportion Harmonique en fonction du point S pris pour origine, on aurait alors :

$$\frac{SA - SC}{SB - SC} = \frac{SA - SD}{SB - SD}$$

mais cela n'est pas nécessaire. Comme on le voit, les segments consistent seulement dans les distances de 4 points ABCD entre eux, et ces 4 points suffisent à établir la relation. Le point S, pris pour origine commune, n'est qu'un repère arbitraire qui ne tient pas à l'essence de la relation. Au contraire, le sommet S est indispensable à l'établissement de l'Homothétie.

Ainsi, le changement de signe dans l'égalité de deux quotients entre longueurs substitue à la centralisation



Les faisceaux $S\alpha$, $S\beta$, $S\gamma$ joignant les mêmes points de la droite M ont même rapport anharmonique.
Les transversales M, M_2, M_3 coupant les mêmes faisceaux ($S\alpha$, $S\beta$, $S\gamma$) que M sont divisées par ces faisceaux suivant les mêmes rapports anharmoniques.

la relation réciproque de deux couples entrelacés. Cela se conçoit, puisque l'opposition du positif et du négatif répond à une synthèse de complémentaires, tandis que l'égalité entre rapports de même signe ne donne qu'une échelle d'intensité.

***

Cependant, une centralisation d'un autre genre peut découler de la proportion harmonique, et cela de deux manières différentes.

Si l'on subordonne tout le système au milieu I de l'un des couples AB, ce couple donne par sa moitié la moyenne géométrique entre les deux autres segments. On a $IA = IB$, et $\overline{IA}^2 = IC.\,ID$.

Ce retour vers l'homogénéité, qui caractérise les moyennes géométriques et qui transforme deux points soit en un point double, soit en points symétriques (carrés négatifs), se rapproche du principe centralisateur. C'est par la moyenne géométrique-type que l'on obtient le pentagone et les suites du dodécaèdre et de l'icosaèdre.

Nous retrouvons ici cet agent d'homogénéité sous une forme plus générale, et la Proportion Harmonique se lie étroitement à l'Inversion et à l'Involution. En effet, les points doubles d'une involution positive sont : moyenne géométrique entre tous les couples ; ces couples sont réciproquement liés entre eux par la Proportion Harmonique. On voit aussi que, dans une proportion harmonique, le point milieu ne se sépare jamais des couples, et qu'ils s'enveloppent tous et ne s'entrelacent

jamais, enfin que le point milieu I du segment AB a pour conjugué le point à l'infini.

En résumé, les divisions harmoniques établies en fonction du couple fixe AB ne sont autre chose que l'involution positive ayant pour points doubles A et B, et pour point central, par conséquent, le point I.

L'Involution (et l'Inversion) est donc l'accomplissement de tous les rapports pouvant former Proportion Harmonique avec un couple donné. La moyenne géométrique marquée par le segment des points doubles, établit au milieu des faisceaux de cercles comme un astre central au sein d'une émanation d'ondes divergentes, oscillant autour de l'unité. L'Involution exprime ainsi le développement universel à travers les alliages en proportions diverses de la relation réciproque de deux couples, dont l'équilibre est marqué par la Proportion Harmonique, et dont le type pur est donné par la Moyenne Géométrique.

***

La Moyenne Géométrique est un agent d'individualisation et d'autonomie, sorte d'équilibre de soi, réalisé par l'homogénéité de qualité. La Moyenne Arithmétique est un agent de centralisation, pour ainsi dire hétéronome et donnant un équilibre statique par rapport au milieu.

La Proportion Harmonique fait apparaître une autre moyenne ayant des caractères spéciaux : la Moyenne Harmonique entre 4 segments. En généralisant, on obtient un centre des moyennes harmoniques, entre *n* segments issus d'un même point.

La Moyenne Harmonique est égale à deux fois (*n* fois pour la relation générale)l'inverse de la distance du point pris pour centre à son conjugué. Cette quantité est aussi égale à la somme des inverses de toutes les distances des autres points au point pris pour centre. Ainsi, A étant pris pour centre et formant couple avec le point B, la Moyenne Harmonique consiste dans l'égalité établie , d'une part, entre 2 (ou *n* fois) l'inverse du segment AB, et, d'autre part, la somme des inverses des 2 (ou des *n*) segments formés avec A par d'autres points substitués à B.

Ainsi, la moyenne harmonique entre 4 points d'un rapport harmonique a pour formule :

$$\frac{2}{AB} = \frac{1}{AC} + \frac{1}{AD}$$

La formule générale relative au centre des moyennes harmoniques entre *n* points sera :

$$\frac{n}{AB} = \frac{1}{AC} + \frac{1}{AC_1} + \frac{1}{AC_3} + \ldots + \frac{1}{AC_n} \text{ soit } n.$$

Réduisant au même dénominateur, et isolant dans un des membres de l'égalité le couple de base AB, la formule des 4 points devient :

$$\frac{AC \;.\; AD}{\dfrac{AD + AC}{2}} = AB$$

et la formule générale :

$$\frac{AC_1 \;.\; AC_2 \;.\; AC_3 \;\ldots\ldots\; AC_n}{\dfrac{AC_1 + AC_2 + AC_3 + \quad + AC_n}{n}} = AB$$

Ce qui signifie que le couple de base AB est égal au quotient de la moyenne géométrique par la moyenne arithmétique des distances de tous les points au centre

A. Et nous reportant à la signification de ces deux moyennes, le couple de base AB , non plus symétrique comme dans le cas de l'involution, mais orienté, (ayant son origine en A et sa terminaison en B), apparaît comme l'expression du rapport entre l'équilibre interne, autonome du *soi*, qui constitue l'individualité typique, à l'équilibre passif, hétéronome, relatif au milieu, au sein duquel l'être se trouve immergé. Ainsi, la Proportion Harmonique, considérée non plus comme relation de réciprocité entre deux couples, mais comme subordonnée à l'un d'eux, est l'expression élémentaire, primitive de deux relations différentes et universelles. Comme moyenne géométrique et involution, le couple de base est rapporté à son centre, et cela répond à l'expression de l'universelle autonomie. Comme moyenne harmonique, les deux points du couple de base sont subordonnés l'un à l'autre ; l'individualité se rétracte sur son origine, sur le point initial de son développement.

Tout ce processus est le cas général de la genèse des suites dodécaédriques et icosaédriques par la Moyenne Raison, que nous avons étudiée précédemment.

Comparons les deux relations entre les mêmes points :

La Proportion Harmonique : $\frac{AC}{AD} = \frac{-BC}{BD}$ et la

Moyenne Harmonique : $\frac{1}{AB} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{AC} + \frac{1}{AD}\right)$.

La Proportion Harmonique exprime les distances du 2[e] couple (C D) à chacun des 2 points du premier (A B). Cela consiste en deux quotients égaux, c'est-à-dire en deux combinaisons.

La Moyenne Harmonique exprime, par l'inverse du couple de base (A B), la moyenne arithmétique des inverses des distances du 2e couple (C D) à un point du premier. Ici, les deux points du 2e couple sont entre eux en relation de simple juxtaposition (addition). Cette moyenne arithmétique, qui traduit un équilibre externe en fonction du milieu, se réalise entre les inverses des segments directement équilibrés par combinaison. Or les inverses représentent la correspondance d'*intus ad extra*. Ainsi, combinaison en deçà de l'unité et juslaposition au delà (ou vice versa), telle est la correlation manifestée entre la Proportion Harmonique et la Moyenne Harmonique qui lui correspond.

***

La relation de pôle à polaire marque une influence nouvelle du principe centralisateur sur la division harmonique. En effet, elle établit l'invariabilité de cette relation entre une infinité de groupes de 3 points et un quatrième. D'autre part, le système de ces groupes et du pôle constitue un faisceau de 4 droites, et pose un sommet qui manifeste, sous une forme bien plus complète, le principe centralisateur, le faisceau jouissant de la division harmonique par rapport à une transversale quelconque. La relation de pôle à polaire est au contraire réciproque, en ce sens que tout point de la polaire A peut être pris pour pôle par rapport à l'autre droite B, qui est le lieu des pôles de la droite A. La relation de pôle à polaire présente le principe centralisateur plutôt comme agissant comme nécessité virtuelle, couvant le système et amenant par son influence

la fixation dans le réel d'un centre unique : le sommet du faisceau. Très suggestive est cette relation s'accomplissant à travers une sorte de barrière formée par la ligne directrice (qui, dans le cas du faisceau, est le couple des deux droites conjuguées à la polaire et au lieu de ses pôles).

Le Rapport Anharmonique

Dire que deux rapports sont égaux, c'est dire que le quotient de l'un sur l'autre est égal à l'unité. On peut donc exprimer la similitude $\frac{SA}{SA'} : \frac{SB}{SB'} = +1$

et la proportion harmonique :

$$\frac{AC}{AD} : \frac{BC}{BD} = -1$$

Ainsi, la Similitude et la Proportion Harmonique apparaissent comme des cas particuliers d'une relation plus générale, celle du quotient de deux quotients de segments. Cette relation générale n'exige que 4 points, sauf pour trois valeurs du quotient, qui sont $+1$, 0 et ∞.

$+1$ est le cas de la Similitude ; il exige la coïncidence de A avec B, (ou bien l'ingérance d'un 5e point, S) soit le 1er couple condensé en un point double.

La valeur zéro donne la coïncidence de D et de B points voisins.

La valeur infinie donne la coïncidence de D et de A, points extrêmes.

La valeur -1 n'implique pas coïncidence du point mais symétrie : les 4 points demeurent distincts, et on a le Rapport Harmonique.

Et ainsi, entre ces 4 valeurs cardinales 0, ∞, $+1$, -1, de toute quantité, la dernière, qui représente l'opposition qualitative pure, permet la dualité de deux couples en relations réciproques. Les trois autres impliquent retour au ternaire ou subordination des deux couples à un 5[e] élément (Similitude).

Dans un rapport anharmonique, on peut intervertir deux points, pourvu qu'on intervertisse aussi les deux autres.

Ainsi, $\frac{AC}{AD} : \frac{BC}{BD}$ répondant à la formule (CDAB), on peut écrire (CDAB) = (BADC) = (DCBA) = (ABCD)

De là, 4 manières de présenter le même rapport (1).

Les 4 points peuvent être combinés de 24 manières et donneront ainsi 6 rapports anharmoniques ayant des valeurs distinctes et jouissant tous des mêmes propriétés. Si l'on attribue au rapport (ABCD) la valeur m, les 6 rapports distincts avec leurs valeurs correspondantes seront :

$$(ABCD) = \frac{m}{1}\,;\quad (CBAD) = \frac{m}{m-1}\,;\quad (DBCA) = \frac{1-m}{1}$$

$$(BACD) = \frac{1}{m}\,;\quad (BCAD) = \frac{m-1}{m}\,;\quad (BDCA) = \frac{1}{1-m}$$

Ces 6 valeurs se groupent en couples, car elles sont deux à deux les inverses les unes des autres.

De plus, les 4 dernières se déduisent des deux premières en remplacant m par $1 - m$ et 1 par $(m - 1.)$, en définitive, par la différence de m et de l'unité.

---

(1) Voir Richard, *Leçons sur les méthodes en géométrie moderne.*

Les 6 rapports distincts obtenus par le même algorithme se groupent ainsi autour de l'unité en opposant l'extérieur à l'intérieur, et la valeur primitive à son complément en fonction de l'unité. Et ces 6 valeurs peuvent être accouplées deux à deux de manière à former l'unité, soit par leur produit, soit par leur somme, soit par leurs inverses. L'unité apparaît ainsi comme le pivot de toutes ces évolutions.

Les 4 substitutions qui sont réalisables dans chacun de ces rapports sans en changer la valeur, ont pour condition de procéder par symétrie binaire. Le rapport anharmonique lui-même est basé sur la répartition de 4 éléments en deux couples. Et ainsi, ce senaire de rapports à quadruples faces exprime la synthèse des relations réciproques par couples d'un quaternaire d'individus, et ces relations accouplées réalisent l'unité.

La relation anharmonique, ce quotient de quotient, manifeste le quaternaire obtenu comme carré de 2, par superposition de deux relations binaires de même nature. Il doit être un pantacle remarquable des principales conditions de l'existence spatiale, et il est à croire que la place prépondérante qui lui est reconnue par la géométrie moderne n'exprime encore qu'une partie de ses propriétés.

***

La constance du Rapport Anharmonique répond à une propriété géométrique des plus remarquables : la Perspective. La relation métrique qui correspond à la perspective et qui permet d'amener par déplace-

ment deux figures en situation perspective, c'est l'Homographie, appelée aussi Projectivité et Collinéarité.

Ces trois noms expriment par trois propriétés qui s'impliquent réciproquement la relation générale d'un quaterne, c'est-à-dire de quatre éléments distribués en deux couples. Et ce ternaire de propriétés inséparables définit l'essence du quaterne. La Projectivité exprime la possibilité d'amener deux quaternes liés par la constance métrique de leur rapport anharmonique à être pris comme perspective l'un de l'autre.

L'Homographie exprime la constance du rapport anharmonique entre deux quaternes. La Collinéarité exprime qu'entre figures homographiques, les éléments se correspondent un à un, et que, si les figures comparées sont de même espèce, par exemple, des systèmes de lignes, de plans, etc., la correspondance s'accomplira entre éléments de même espèce, point à point, droite à droite, plan à plan.

Ainsi, outre la synthèse numérique réalisée sur l'unité par les 6 rapports anharmoniques de 4 points, la constance de ce rapport entraîne la synthèse géométrique des figures qu'elle embrasse par rapport à un point central, (perspective), et ensuite l'accouplement (figure à figure) de tous les éléments, sans altérer la hiérarchie des éléments propres à chacun des systèmes (collinéarité et homographie).

CHAP TRE

L'Homographie

L'homographie (projectivité, ou collinéarité) est à la perspective ce que la similitude est à l'homothétie. Elle compare les mesures et la disposition des parties entre les figures et fait abstraction de la relation de situation qui est le principe de ces rapports. La perspective ou projection centrale est la cause géométrique de l'homographie. Elle consiste à relier tous les points d'une figure à un même point S par un faisceau de rayons. Les intersections de ces rayons par un plan ou par une droite transversale quelconque donnent une figure nouvelle, qui est une projection perspective de la première, et réciproquement. Une infinité de figures peuvent ainsi être des projections les unes des autres ; elles ont toutes pour figure projetante le même faisceau.

***

La projectivité conserve les propriétés descriptives, c'est-à-dire les relations définies par une qualité géométrique, par une situation. Ainsi, en projection, les systèmes de points en ligne droite, les systèmes de droites concourantes ou de plans concourants sont conservés.

Au contraire, les seules relations métriques qui subsistent sont celles qui dépendent exclusivement des angles au centre du faisceau projetant. Elles s'expriment par une fraction dont les deux termes sont composés par un produit de segments pris sur les mêmes lignes se correspondant une à une, et déterminés par un même groupe de points différemment associés. Le rapport anharmonique (et, *a fortiori*, la proportion harmonique) et autres relations de la même famille sont à peu près les seules qui satisfassent à cette condition.

Les propriétés métriques qui ne dépendent pas exclusivement des angles au centre du faisceau ne peuvent se conserver ; car, ainsi que le fait observer Reye, il n'existe dans le faisceau aucun élément qui occupe, par rapport aux relations métriques une situation analogue à celle du point à l'infini propre aux figures rectilignes ; et réciproquement, dans les figures rectilignes, aucun segment ne peut, par rapport aux relations métriques, se définir et se distinguer d'une façon spéciale, comme l'angle droit dans le faisceau. En un mot, il faut comparer une rotation, (c'est-à-dire une totalité divisible) à une translation, (c'est-à-dire à un élément multipliable). L'angle possède une unité absolue dans la perpendicularité : les segments n'ont pas d'unité absolue. L'opposition qui existe entre ces deux facteurs de la projectivité est donc une inversion. Et les seules propriétés métriques qui peuvent subsister à travers une inversion sont celles qui, comme la relation anharmonique, se composent de deux rapports opposés, et sont en quelque sorte réversibles. On peut rapprocher ce caractère métrique du caractère descriptif des

figures anallagmatiques, figures qui demeurent invariables dans une inversion.

Formule de l'Homographie

L'homographie s'exprime en fonction de la constance du rapport anharmonique par la formule
$\frac{AC}{AD} : \frac{BC}{BD} = \frac{A'C'}{A'D'} : \frac{B'C'}{B'D'}$ On voit immédiatement qu'à un couple donné, on peut en associer une infinité d'autres ; mais que, si 3 éléments sont déterminés, le 4e l'est aussi. Il s'ensuit que 3 couples déterminent une homographie. Cette loi découle également de l'équation que nous allons voir, parce qu'elle contient 3 coefficients indépendants.

L'homographie se définit algébriquement en fonction de la collinéarité, c'est-à-dire de la correspondance univoque et réciproque des éléments entre deux figures. Cette propriété exprime l'homographie par la généralité de son domaine. C'est une liaison entre deux variables m et m', telle qu'à toute valeur de l'une corresponde une valeur unique de l'autre, et réciproquement. Or, algébriquement, cela répond à une équation du 1er degré en m et m', qui sera de la forme

$mm' - J'm - Im' + D = 0.$ (1)

Choisissons, dans chacune des deux divisions F et F',

(1) Le coefficient du 1er terme peut toujours être ramené à l'unité et les coefficients des autres termes choisis de manière à pouvoir être affectés du signe —.)

un point origine pour évaluer tous les points de sa division. Les deux points origines ne sont pas nécessairement homologues entre eux.

Le point m de F, et et le point m' de F' étant deux points homologues, l'équation montre que le coefficient J' est la valeur de m' quand m devient infini, et le coefficient I, la valeur de m quand m' devient infini. Les points I et J' sont respectivement les points homologues des points à l'infini des divisions F' et F. On les appelle *points limites.*

L'équation précédente peut être amenée à la forme suivante :

$$(m - \mathrm{I})\ (m' - \mathrm{J'}) = \mathrm{IJ'} \text{ (qui est une constante).}$$

Elle peut alors s'énoncer ainsi : le produit formé par les distances qui séparent respectivement deux points homologues du point limite de leur division est constant et égal au produit des points doubles.

Cette forme de l'équation n'a pas de sens quand les points à l'infini des deux divisions sont homologues. En ce cas, les deux divisions homographiques sont semblables, et réciproquement. Si IJ' $= + 1$, les divisions sont égales et de même sens ; si IJ' $= - 1$, elles sont égales et de sens contraire.

La formule $(m - \mathrm{I})\ (m' - \mathrm{J'}) = \mathrm{IJ'}$ exprime l'homographie d'une manière synthétique, chaque couple de points homologues étant rapporté aux points limites, points qui lient entre elles les deux divisions par un produit constant, c'est-à-dire par une relation d'inversion ou d'involution,

Homographie dans la 1re dimension

Examinons d'abord l'homographie dans la 1re dimension : c'est-à-dire deux divisions homographiques établies sur une droite servant de base commune. On appelle alors point double tout point d'une division qui coïncide avec son homologue. Quand les deux divisions ont une même base, il ne peut y avoir plus de deux points doubles sans que les divisions coïncident, cela en vertu du rapport anharmonique, qui se trouve entièrement déterminé par 3 points.

D'autre part, il y a toujours en ce cas deux points doubles réels ou imaginaires, en vertu de l'équation générale de l'homographie ; car, si on fait $m = m'$, elle devient équation du 2e degré en m et a donc deux racines réelles ou imaginaires.

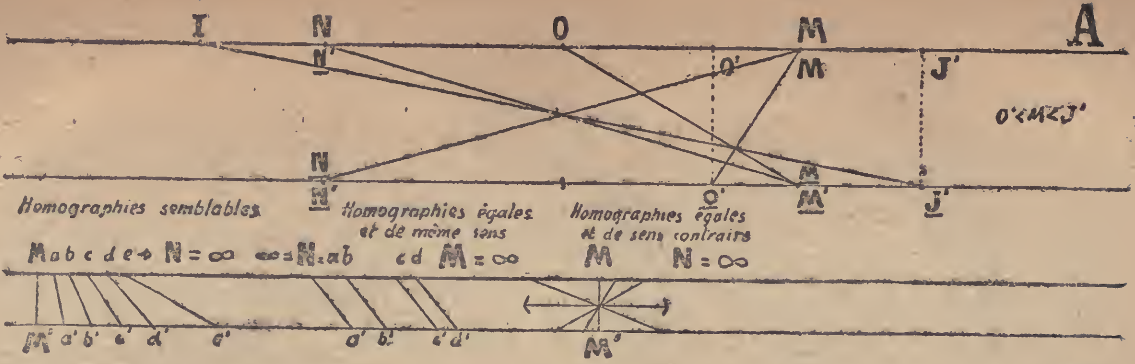
Les deux divisions ayant même base et les origines pouvant être arbitraires, nous pouvons choisir pour origine commune le point milieu du segment des points limites. Alors, les grandeurs I et J' seront égales et de signes contraires, et exprimeront la demi-distance des points limites. Le point origine (de valeur zéro), considéré comme appartenant à la même division que I, aura pour homologue un point de valeur O', qui, généralement, ne coïncidera pas avec lui.

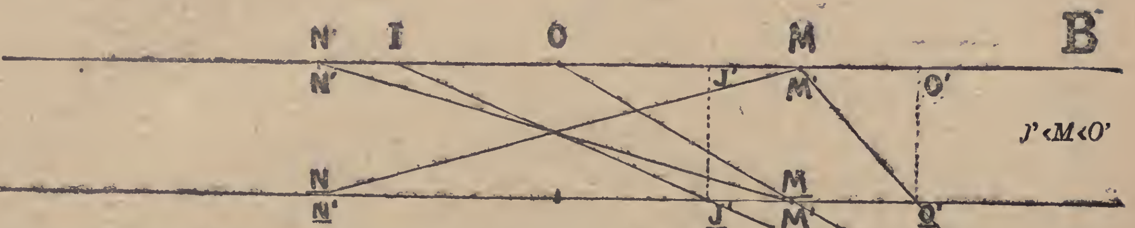
Donc, si $J' = - I$, l'équation

$$(m - I)\,(m' - J') = I\,J' \text{ devient :} \qquad (1)$$

$$m\,m' + J'\,(m' - m) = 2\,J'^2. \qquad (2)$$

Faisant varier le couple m, m', amenons m à l'origine ; m' tombe alors en O', homologue de l'origine.





Détermination des points limites (points doubles réels)

Détermination des points limites (I, J'), *les points doubles* (M, N) *étant donnés*

(O milieu des points doubles et des points limites, O' son homologue dans le système ')

3 couples (aa', bb', cc') étant donnés, on transporte sur une parallèle les points du système '; on joint ab' et $a'b$, qui se coupent en β, ac' et $a'c$ qui se coupent en γ. La droite $\beta\gamma$ intersecte la base au point I, et la parallèle à cette base, au point qui correspond à J'.

Ici, les couples donnés sont les 2 points doubles (MM') (NN') et leur point milieu avec son homologue (O et O').

L'équation précédente devient $m\,O' + J'(O' - m) = 2\,J''^2$. et comme $m = o$, elle se réduit à $J'\,O' = 2\,J''^2$,

Puis, pour que m soit point double, il faut que $m = m'$. Opérant cette identification dans l'équation (2) et remplaçant en même temps son 2e membre $2\,J''^2$ par sa valeur $J'\,O'$, l'équation (2) devient $m^2 = J'\,O'$, d'où $m = \pm\sqrt{J'\,O'}$.

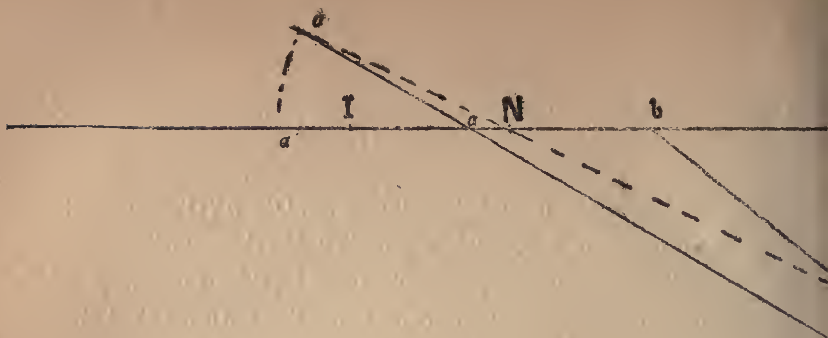
Et ainsi, les homographies de même base ont leur principe centralisateur dans une moyenne proportionnelle représentée par les points doubles, moyenne établie entre les points limites et l'homologue du centre de symétrie commun aux points doubles et aux points limites.

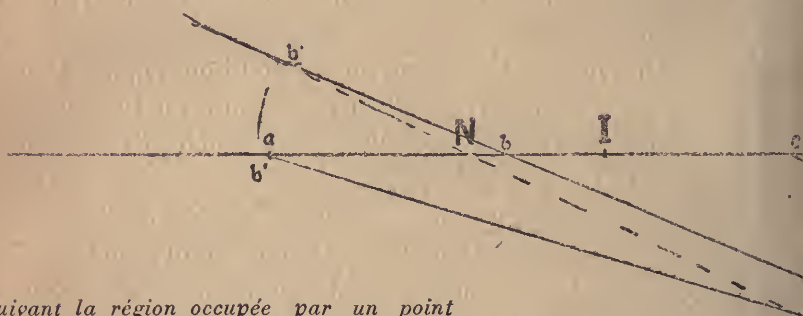
On voit que l'équation a deux solutions égales et de signes contraires ; donc, il y a deux points doubles symétriques comme les points limites par rapport à un même point O.

Si J' et O' sont de même signe, c'est-à-dire situés du même côté du point milieu, les points doubles sont réels. On les obtient alors en rabattant autour du point milieu la tangente menée de ce point au cercle décrit sur O' J' comme diamètre.

Le segment m étant moyenne proportionnelle entre le segment O' et le segment J', si l'un des segments O' ou J' est plus grand que le segment m, l'autre est plus petit, et vice versa. On aura donc l'une des deux suites I n O J' m O' ou I n O O' m J' (les lettres représentant ici les points et non les segments) et n étant l'autre point double.

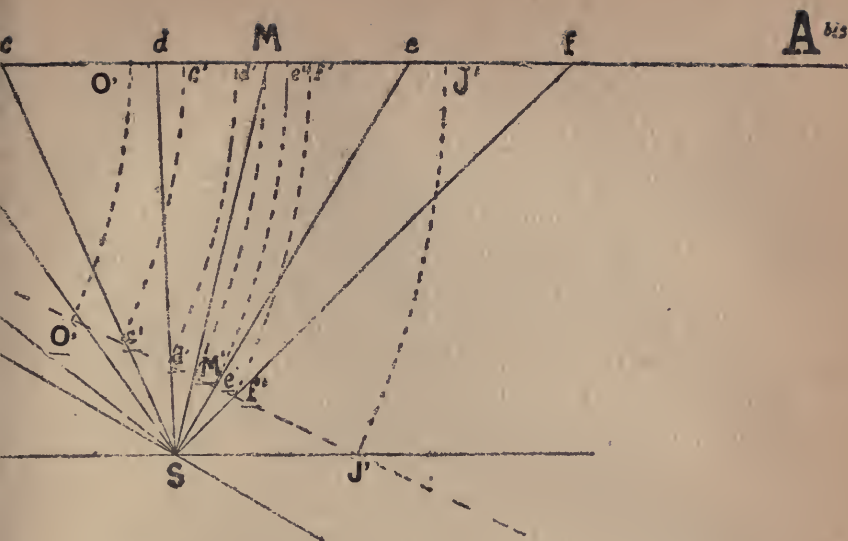
Si l'un des points doubles est relégué à l'infini, I et J' coïncident les deux divisions sont semblables. (O, O') est alors l'autre point double. Si les deux points doubles

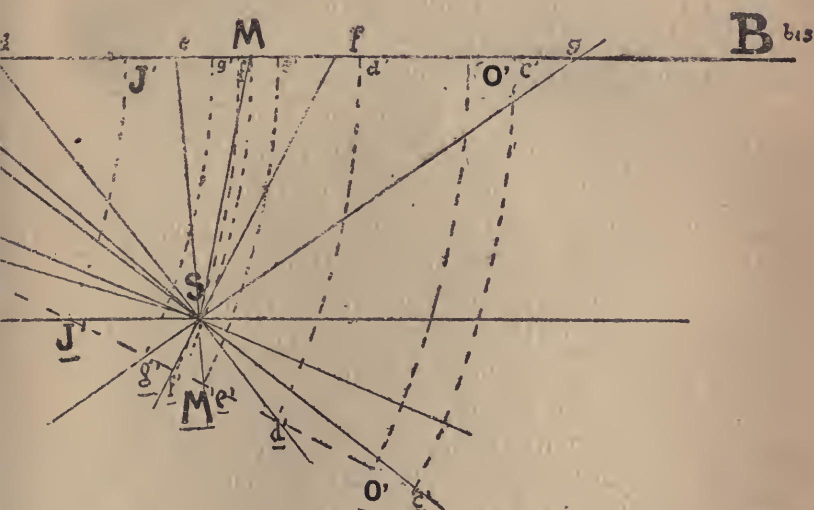




Suivant la région occupée par un point (a b c etc) de la 1re division son homologue (a b' c' etc) se situe diversement par rapport aux points doubles et aux points limites. Pour déterminer cette situation nous avons reporte sur une droite pointillée, tournant autour du point double N, *les points* J,' M' *et* O'. *Cela a permis de déterminer le point* S, *sommet d'un faisceau qui donne la position des points (a' b' c' etc) rabattus ensuite sur la base primitive.*

HOMOGRAPHIES DE MÊME B





POINTS DOUBLES RÉELS

vont à l'infini, I et J' y vont aussi, O' est indéterminé ; les divisions sont égales et de même sens. Si l'un des points doubles va à l'infini et l'autre au point central O, I et J' se confondent à l'infini ; tous les couples de points homologues deviennent symétriques par rapport à O, et les homographies sont égales et de signes contraires.

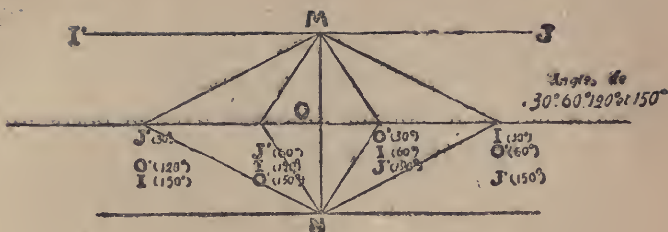
Si J' et O' sont de signes contraires, c'est-à-dire séparés par O, les racines et les points doubles sont imaginaires.

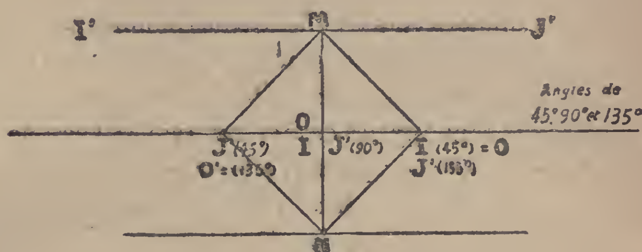
***

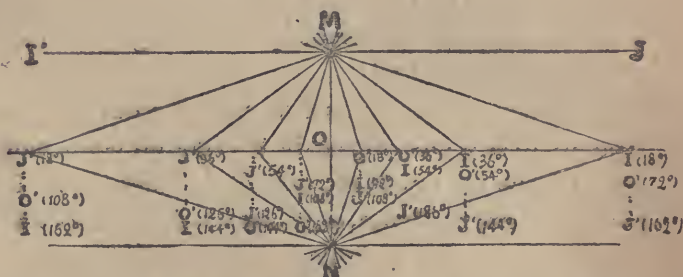
Les homographies de même base, en ce cas, répondent à la double division homographique établie sur une transversale ou base, par les deux côtés d'un angle tournant autour de son sommet situé dans le plan. Alors, chacun des côtés engendre un faisceau ; les deux côtés pris dans une même position de l'angle sont rayons homologues, et déterminent sur la base les points homologues de la double division homographique. L'angle étant constant, les côtés homologues ne peuvent coïncider pour aucune position ; les points et rayons doubles sont imaginaires.

Les points doubles sont : l'un le sommet de l'angle, l'autre le point symétrique par rapport à la base situé sur la perpendiculaire élevée du point milieu du segment des points limites, à une distance égale à la constante homographique.

Les points limites I et J' sont donnés par les positions de l'angle où l'un de ses côtés est parallèle à la base. Pour l'angle de 45°, le point O' coïncide avec J'; pour 135° , il coïncide avec I ; de 0° à 45° et de 135° à 180°, le point O' est en dedans des points limites ; de 45° à 135°, il est en dehors. Pour l'angle droit, on retombe







HOMOGRAPHIES DE MÊMES BASES A POINTS DOUBLES IMAGINAIRES

M.N *Points doubles imaginaires conjugués*
O *Milieu des points doubles*
O' *Homologue dans le système de* **O**

Les 2 faisceaux de même base sont engendrés exceptionnellement par les 2 côtes d'un angle constant tournant autour de son sommet placé à l'un des points doubles (le système représente le côté droit de l'angle.)

Les angles supplémentaires interchangent **I** *et* **J**
Les angles complémentaires interchangent **I** *et* **O'**
I *et* **O'** *sont toujours du même côté de* **O**

Pour 45° **O'** *coincide avec* **I**.

Pour 90° **O** *coincide avec* **I** *et* **J** **O'** *coincide avec la parallèle à la base. (Involution.)*

O' *est en dehors de* **I** *pour les angles compris entre* 45° *et* 135°, *en dedans de* **I** *et* **O'** *à* 15° *et* 135° *à* 180°.

dans l'involution, I et J' coïncidant avec O, O' va à l'infini.

Connaissant O', I et J', on détermine M et N aisément : ils se trouvent à l'intersection de la circonférence décrite sur O' J' comme diamètre avec la perpendiculaire à la base élevée en O.

***

La position des points et des rayons doubles ne dépend pas de la grandeur de l'angle, mais seulement de la distance du sommet de l'angle à la base. Les rayons doubles imaginaires sont appelés *droites isotropes*, et leurs points à l'infini, *ombilics* ou *points cycliques* du plan. De position invariable, les droites isotropes ont, avec deux droites réelles, un rapport anharmonique qui dépend exclusivement de l'angle et des droites réelles. La formule du rapport anharmonique des angles donne ici pour résultat $e^{2\sqrt{-1}.\omega}$ (1).

Le rapport anharmonique de 4 droites qui joignent à 4 points fixes d'une courbe du 2e degré un point mobile de la courbe est constant ; quand deux des points fixes sont les points cycliques, la constance du rapport anharmonique exige la constance de l'angle qui tombe sur les deux autres points fixes. Le point mobile réalise ainsi un angle constant en décrivant la courbe ; cette

---

(1) Voir pour la démonstration de cette formule établie par Laguerre: Les *Premiers principes de géométrie moderne* (p. 22) p. DUPORCQ, ou, d'une autre manière, le *Traité de géométrie* (T. II, p. 450) par ROUCHÉ et COMBEROUSSE.

courbe est donc un cercle. Et ainsi, tous les cercles d'un plan passent par les deux point cycliques.

Ces deux points imaginaires sont les points de liaison de tous les cercles possibles du plan. Ils expriment ainsi le centre d'émanation de toute rotation pure dans le plan. C'est à eux qu'aboutissent les tangentes imaginaires menées à une conique par ses foyers. Ils réalisent ainsi, à travers une dimension supérieure, l'irréalisable tangence menée à une courbe de son intérieur le plus intime. Et toutes les hyperboles équilatères sont conjuguées aux points cycliques. Ces points sont donc aussi le germe de la proportion harmonique ; et les hyperboles équilatères apparaissent comme la liaison harmonique de tout le plan, synthétisée par ces deux points remarquables.

***

Dans le cas général de deux divisions homographiques de même base, le point m de la 1er division coïncide avec un point n' de la 2e, et l'homologue m' de la 2e division ne coïncide pas avec l'homologue n du point n', mais avec un autre point p de la 1re division dont le conjugué p' ne coïncide pas avec m. Mais, si les deux divisions ont 3 points doubles, les deux divisions se confondent ; tous les points ne deviennent pas doubles, mais réciproques, c'est-à-dire que, si m coïncide avec n', leurs homologues m' et n coïncident également. Cela définit l'Involution que nous avons vue précédemment sous l'aspect d'un produit constant entre couples de points sur une droite. C'est qu'une de ces propriétés entraîne l'autre. Cela se produit quand les points limites I et J' se confondent ; le point milieu de leur segment (qui ser-

vait d'origine aux homographies de même base) devient centre de l'involution ; ce centre est donc un point triple.

Dans une involution, entre les points doubles a, b et un couple de points m et m', considérés tour à tour comme appartenant aux deux divisions, il y a l'homographie suivante :

$(abmm') = (abm'm)$. Ces deux divisions sont égales, sauf le changement de signe. D'où $\frac{abmm'}{abm'm} = -1$, et les 4 points a, b, m, m' sont conjugués harmoniques. Le couple m, m' étant quelconque, tous les couples dans une involution sont conjugués harmoniques par rapport aux points doubles.

L'homographie engendrée par un angle pivotant sur son sommet devient une involution quand cet angle est droit, car la correspondance est ici réciproque (l'angle droit étant égal à son complément). Deux droites rectangulaires sont donc conjuguées harmoniques par rapport aux droites isotropes de leur plan issues de leur point commun, et leurs points à l'infini sont conjugués aux points cycliques.

***

Ainsi, l'involution et les homographies de même base représentent le germe des sections coniques dans la 1re dimension. L'involution correspond : dans le cas des points doubles réels, au cercle ; dans le cas des points imaginaires, à deux droites rectangulaires. Les homographies de même base à point limites distincts répon-

dent à l'ellipse et à l'hyperbole, et, dans le cas de similitude, à la parabole.

Les points IJ', conjugués des points à l'infini, correspondent aux foyers. Et ainsi, les divisions homographiques de même base apparaissent comme l'ingérence du principe de translation au sein de la rotation, ingérence qui se manifeste par la formation d'un axe déterminé par deux foyers (les points limites), et se traduisant sous deux formes différentes : écartement (cas des points réels) ou symétrie par rapport à un axe perpendiculaire (cas des points imaginaires). Les points doubles répondent aux sommets des coniques.

Le couple des points doubles et le couple des points limites ont même centre ; les points doubles sont les nœuds des deux systèmes ; les points limites, conjugués de l'infini, rattachent à un centre les bornes de chaque système : c'est l'étirement extrême faisant traction entre un point déterminé de l'un des systèmes et l'extrémité de l'autre.

Les points doubles relient les systèmes par élimination de la quantité spatiale (distances), et conservent distincte la qualité spatiale (allure dans la 1re dimension, orientation dans les dimensions supérieures). Les points à l'infini représentent l'élément qualitatif pur de chaque système (leur direction), réalisé par l'absolu de la quantité ; les points limites transposent en quantité finie la qualité pure pleinement manifestée par l'expansion à l'infini.

Si les deux systèmes représentent des objets dont les valeurs sont exprimées par les points homologues, les points doubles représentent l'équivalence évidente entre objets que la destination et la provenance seules

différencient ; les points à l'infini traduisent l'inestimable, ce qui vaut par sa qualité seule, ce qui est toujours un don, quelque prix qu'on en donne, mais qui pourtant trouve dans les points limites une équivalence quantitative dont le taux est réglé par les ressources bornées qu'on peut lui appliquer.

Homographie exprimée comme relation de réciprocité

La Proportion Harmonique se présente, nous l'avons vu, sous deux formes : l'une marque la relation réciproque entre 4 éléments ; l'autre, au moyen du point central de l'un des couples, consiste en une moyenne géométrique et exprime l'élément centralisateur, synthétique, de toute la relation. Les homographies de même base définissent leur norme par l'établissement des points limites et des points doubles, et c'est une moyenne géométrique qui exprime encore cette détermination. Enfin, c'est sous la forme synthétique et unificatrice de moyenne géométrique que nous avons envisagé l'involution, rapportant chaque couple à un point central et à un segment moyen.

Mais, de même que le rapport harmonique et la relation anharmonique (qui est la base de l'homographie) s'expriment, indépendamment d'un élément centralisateur, par une réciprocité entre 4 éléments accouplés deux à deux, de même l'involution est la relation entre 6 éléments accouplés deux à deux.

En effet, au lieu d'exprimer un couple en fonction du centre S et de l'élément double K, sous la forme

$SK^2 = SA.SA'$, on peut établir l'égalité de deux couples entre eux, tous deux rapportés au centre SA,SA'=SB,SB'. Mais on peut encore substituer au point central un 3e couple, et exprimer l'involution par une relation entre 6 points. La formule est alors

AB', BC', CA' = — A'B, B'C, C'A,

forme analogue à celle de la proportion harmonique entre 4 points, qui peut s'écrire

AB, A'B' = — AB', BA'.

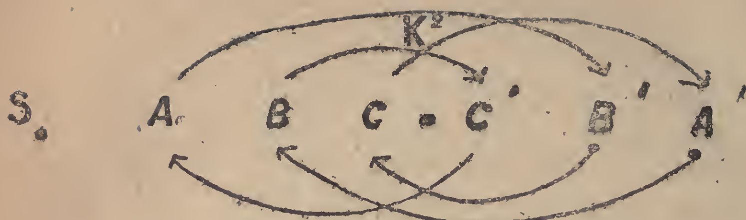
Et, comme l'a montré Chasles, l'involution implique toujours 6 points. Quand on l'exprime par 4 points, l'un d'eux est un point double, l'autre est le centre, qui a pour homologue le point à l'infini. En effet, ce caractère même définit le centre.

Dans la formule ci-dessus, les segments donnés par chaque membre de l'égalité sont constitués par les points n'ayant pas d'extrémité commune.

Dans chaque membre, les segments homologues se croisent deux à deux, si la constante est positive. Si la constante est négative, deux des couples de segments homologues se croisent; le 3e couple donne un segment qui enveloppe les deux segments qui sont ses facteurs, tandis que son homologue est enveloppé par les homologues de ces facteurs.

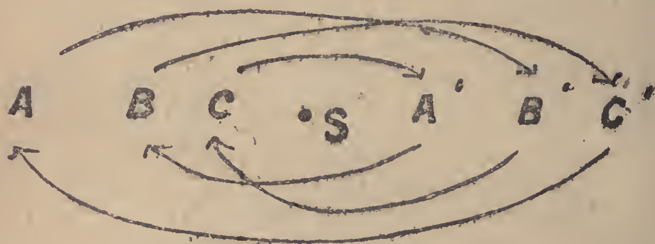
***

La relation entre les 6 points a la propriété métrique suivante : est nulle la somme des trois produits formés chacun par les deux segments d'un couple et par la demi-distance des milieux des deux autres couples. Soit AA', BB', CC', les couples de segments. Soit :



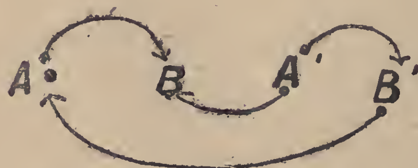
Involution à puissance positive

K³



K'²

Involution à puissance négative



Proportion harmonique

α la distance des milieux des deux couples BB', CC',
β la distance des milieux des deux couples AA', CC',
γ la distance des milieux des deux couples AA', BB',
On aura $AA' \alpha + BB' \beta + CC' \gamma = 0$.

Ici, le principe centralisateur se trouve subdivisé en trois éléments, qui sont les milieux des segments, et qui sont comme les pôles des segments opposés.

De cette formule, on tire trois groupes de deux relations anharmoniques égales et quatre couples de produits de 3 segments égaux avec signes contraires. Enfin, la relation des 6 points en involution peut s'exprimer de 12 manières différentes par une équation entre trois termes.

La Proportion Harmonique est donnée par un angle et ses deux bissectrices coupés par une transversale, ou par une diagonale de quadrilatère intersectée par les deux autres.

L'Involution apparaît, quand on inscrit le quadrilatère dans une conique, par les intersections opérées par une transversale quelconque (*Desargues-Sturm*); les diagonales peuvent remplacer la conique circonscrite (*Pappus*), (c'est le cas où la conique se réduit à deux droites.) Par corrélation, l'Involution s'applique aux faisceaux de tangentes menées d'un point fixe aux coniques tangentes à quatre droites fixes.

Un triangle dont les côtés sont supposés prolongés indéfiniment fournit deux relations d'involution, l'une positive, l'autre négative.

1° Par une transversale coupant les côtés (*Théor. de Menelaüs*), 2° par les trois droites concourantes menées de chacun des sommets (*Théor. de Jean de Ceva*), on détermine, sur les côtés, des segments tels que le produit

des 3 segments, n'ayant pas d'origine commune, est égal au produit des trois autres. (Le signe dépend du sens des segments.) Appelant donc A, B, C, les sommets, a, b, c, les points d'intersections sur les côtés opposés, on a
aB, bC, cA = aC, bA, cB (*Théor. de Menelaüs*).
aB, bC, cA = — aC, bA, cB (*Théor. de Jean de Ceva*).

Ces théorèmes entraînent les théorèmes réciproques(1).

***

Ces théorèmes sont, pour un groupe de six points et de six segments, ce que la Proportion Harmonique et la Similitude sont pour un groupe de 4 ou de 5 points et de 4 segments. Mais ici, le signe — correspond au concours des éléments en un centre (*théorème de Jean de Ceva*), tandis que, pour le quaternaire, ce concours (homothétie) répond au signe + ; et inversement, la distribution en ligne droite répond au signe + pour les 6 points (*théorème de Menelaüs*), et au signe — pour les 4 points (proportion harmonique).

Ici, comme dans la plupart des cas, l'involution répond à un concours de droites en un point ou à une répartition,

---

(1) Le théorème de Menelaüs a été généralisé par Carnot en considérant un triangle intersecté par une conique qui rencontre ces côtés en 3 couples de points. La relation est alors :

$$\frac{Ab.\ Ab'}{Cb\ Cb'} \cdot \frac{Ca\ Ca'}{Ba\ Ba'} \cdot \frac{Bc\ Bc'}{Ac\ Ac'} = 1$$ relation qui est projective.

On en déduit que si, dans le plan d'une conique, on mène par un point quelconque deux parallèles à deux axes fixes, le rapport des produits des segments (réels ou imaginaires) que la courbe détermine avec ces droites à partir de leurs points communs est constant. (Newton.)

de points en ligne droite. Ces théorèmes ont du reste pour corollaires le concours des médianes, des bissectrices et des hauteurs d'un triangle, et la répartition en ligne droite des milieux des trois diagonales d'un quadrilatère complet.

L'Involution et la Proportion Harmonique sont des cas centraux de la Relation Anharmonique, et les théorèmes de Menelaüs et de Jean de Ceva ne sont que les cas centraux des relations déterminées par 3 points pris sur les côtés d'un triangle et joints entre eux, ou joints aux sommets opposés.

La Proportion Harmonique est une involution dans laquelle un couple est formé par les éléments doubles; or, une involution est caractérisée par l'égalité de deux rapports anharmoniques de 4 quelconques d'entre les 6 points de trois couples. De telle sorte que l'on a, par exemple, $(abc\,b') = (a'b'c'b)$. Donc, un quelconque (ici le couple $b\,b'$) des 3 couples figure par ses deux éléments dans chacun des rapports anharmoniques, tandis que les deux autres ne mettent qu'un élément dans chacun d'eux. C'est là le retentissement dans l'Involution de la constitution de la Proportion Harmonique.

Celle-ci se manifeste à son tour comme un senaire condensé en quaternaire, puisque l'un des couples $(a\,a')$ est constitué par la fusion de deux couples involutifs, chacun en un point double.

Le quaternaire de la Proportion Harmonique apparaît donc comme constitué de deux couples n'ayant pas la même valeur. Mais, comme on peut prendre pour points doubles l'un ou l'autre des couples à volonté, elle n'en reste pas moins équilibrée. Elle constitue ainsi un équilibre dynamique et non inerte, équilibre rompu dès

qu'on veut le fixer. Elle exprime ainsi d'une manière remarquable le principe quaternaire du Kosmos qui, tout en polarisant, entretient le mouvement et l'évolution que l'opposition pure et simple tend à empêcher. Elle décèle, dans l'essence de ce quaternaire dynamique, un principe ternaire dédoublé, et montre le senaire comme sa contre-partie explicite, relation déjà observée en étudiant les polyèdres.

La Perspective

Nous avons vu sur une droite l'expression élémentaire la plus simple de l'Homographie, donnée par la relation anharmonique de 4 points. Dans le plan, la manifestation la plus élémentaire est celle du faisceau de 4 droites. La relation des angles de ce faisceau exprime son rapport anharmonique et le définit. Toutes les transversales menées à ce faisceau sont divisées suivant le même rapport anharmonique que la transversale qui exprimerait les sinus des angles. Toutes ces transversales, quelles que soient leurs directions, sont donc des figures homographiques entre elles. Le faisceau synthétise, dans le rapport de ses angles, toutes les divisions opérées sur ses transversales.

D'autre part, une transversale étant divisée suivant un certain rapport anharmonique, tous les faisceaux dont les 4 rayons homologues couperont la transversales aux mêmes points auront le même rapport anharmonique, quels que soient leurs angles.

***

Dans l'homothétie, il n'y a qu'un angle au centre : la constance du quotient des longueurs implique le parallélisme des transversales, et entraîne la constance des angles périphériques ; l'angle est l'invariant du groupe. Dans la perspective, il y a quatre angles au centre qui se chevauchent. Leur rapport seul est constant ; les transversales peuvent se mouvoir en tous sens en rotation et en translation ; la relation est toujours satisfaite, mais les angles périphériques ne sont pas conservés : le rapport anharmonique est l'invariant du groupe.

Dans la perspective, le principe centralisateur commence à se dissocier. Le centre n'exerce plus la même prépondérance : une part de la rotation cesse de se subordonner au point central pour s'attacher à la transversale. En effet, après l'égale intensité des rayons caractéristiques de la rotation absolue, dans les formes régulières, la centralisation diminue dans l'homothétie : les rayons deviennent inégaux ; les angles que font avec eux les éléments périphériques varient d'un rayon à l'autre, mais restent fixes pour chaque rayon. Ce parallélisme des transversales conserve encore une orientation subordonnée au centre, et les juxtapositions homothétiques donnent la spirale qui gravite encore autour du centre.

***

Avec la perspective, la périphérie devient rectiligne ; elle ne gravite plus autour du centre, et ne lui demeure subordonnée que par la constance du rapport anharmonique. Or cette constance ne porte plus que médiatement sur les éléments géométriques, puisqu'elle ne s'attache qu'à leurs quotients. Une part du principe de

rotation se trouve communiquée aux transversales puisqu'elles peuventtourner sur elles-mêmes sans altérer le rapport anharmonique. Et nous touchons peut-être ici au principe métaphysique des mouvements des planètes, qui se meuvent à la fois par rotation et translation, et dont les orbites sont des coniques, courbes qui sont le véritable domaine de la projectivité.

***

La perspective réunit deux sortes de relations : 1° les relations réciproques des transversales à un même faisceau ; 2° une double relation de subordination. D'abord, la relation des transversales au faisceau caractérise le principe centralisateur du faisceau ; elle rattache une infinité d'êtres différenciés à un même principe formateur, et réalise l'universel d'une espèce constituée par des individus variés, mais tous assujettis à un même caractère.

Ensuite, on peut réciproquement subordonner à une même transversale une infinité de faisceaux de centres différents, mais dont les rayons couperont la transversale aux mêmes points. Tous ces faiseaux auront un même rapport anharmonique. Ici, c'est la transversale devenue axe qui règle une infinité de faisceaux par le lien quaternaire du Rapport Anharmonique : c'est-là le germe de la Relation Homologique.

L'Homologie

Nous avons considéré la constance du rapport anharmonique entre tous les segments homologues déterminés sur

un nombre quelconque de transversales par 4 rayons fixes d'un faisceau. Nous avons vu aussi ce rapport exprimé par les éléments de périphérie.

Examinons maintenant la constance du rapport anharmonique exprimé par les éléments de rayonnement. Il s'agit de sectionner un nombre quelconque des rayons d'un faisceau S suivant le même rapport anharmonique, déterminé par le centre du faisceau et par 3 transversales. Pour cela, il suffit de former un faisceau T en faisant concourir les 3 transversales en un même point, le 4e rayon de ce faisceau étant la droite qui joint le sommet des deux faisceaux S et T. La condition requise est que les 3 transversales concourent en un même point. Si l'une de ces transversales reste fixe, les deux autres ne pourront donner divers rapports anharmoniques constants pour chaque situation qu'à la condition de s'intersecter sur la transversale fixe.

Donc, la condition générale, pour que les rayons d'un faisceau S, limités d'une part par leur sommet, de l'autre par une transversale fixe (ou axe), soient divisés en un même rapport anharmonique par deux autres transversales, est que ces deux transversales s'intersectent en un même point de l'axe.

Ces transversales mobiles et l'axe sont coupés à leur tour par le même faisceau S, et les rayons homologues déterminent sur elles un même rapport anharmonique.

Les figures qui répondent a ce cas particulier de la perspective, où la constance du rapport anharmonique s'est établie en périphérie et en rayonnement, sont dites homologiques entre elles. Géométriquement, la relation homologique est caractérisée par la situation sur un même rayon de tous les couples de points homologues,

et par l'intersection sur la même droite de toutes les droites homologues. Ces deux propriétés s'entraînent réciproquement (1). Le centre S du faisceau primitif se nomme centre d'homologie, l'axe qui est le lien des sommets de tous les faisceaux T_n est dit axe d'homologie. Dans l'espace, une relation analogue a lieu : l'axe est remplacé par un plan.

***

L'Homologie représente donc pour ainsi dire la Relation Anharmonique et la Projectivité sous forme réciproque ; car on peut dire que « deux divisions sont homologiques quand elles sont la perspective l'une de l'autre ». Mais elle combine la constance anharmonique définie par un faisceau unique S à la constance anharmonique définie par une infinité de sectionnements opérés sur ses rayons au moyen de tous les faisceaux ayant leurs centres sur un même axe. Ici donc, le principe centralisateur se manifeste sous deux modes à la fois : le mode individuel, représenté par le centre d'homologie et le mode universel, du 1er ou du 2e degré, représenté par l'axe ou par le plan d'homologie.

Le rapport anharmonique d'un système homologique est donc constant. Appelant S et S' les distances respectives des points homologues d'un même rayon au centre

---

(1) La relation homologique a été établie en constatant la réciprocité des deux relations suivantes entre deux triangles : 1° côtés situés deux à deux sur 3 droites concourantes, 2° intersection des côtés deux à deux sur une même droite (Théorèmes de Desargues et de Poncelet.)

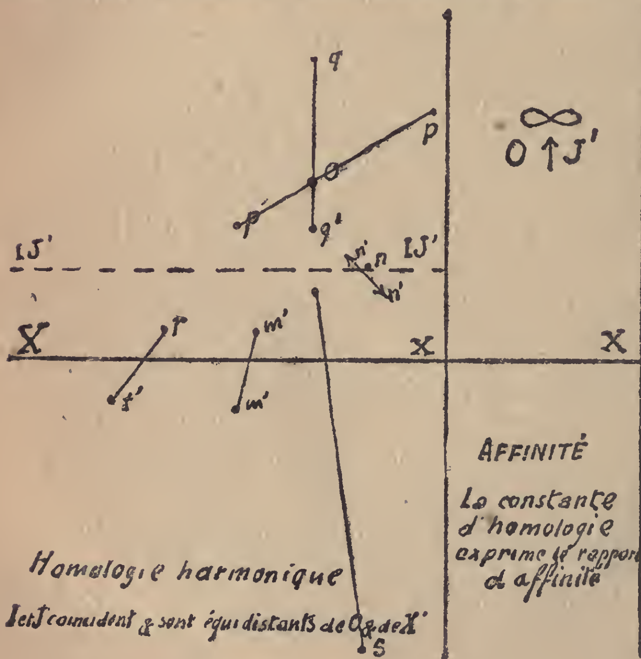
d'homologie, M et M' leurs distances respectives à l'axe d'homologie (distances comptées sur le rayon où ils se trouvent), la constance anharmonique K prend ici le nom de constance d'homologie, et l'on a la formule $\frac{S}{M} : \frac{S'}{M'} = K$

***

Les deux figures homologues F et F' ont chacune une droite à l'infini dont les homologues J' et I sont en général des droites à distance finie. Les droites de l'infini doivent rencontrer leurs homologues I et J' sur l'axe d'homologie, et cela sur un point à l'infini de cet axe : c'est dire que I et J' sont parallèles à l'axe d'homologie. Pour déterminer leur distance à cet axe, il suffit de partager suivant les rapports K et $\frac{1}{K}$ la perpendiculaire abaissée du centre d'homologie S sur l'axe d'homologie X; car, dans la relation $\frac{S}{M} : \frac{S'}{M'} = K$, S' et M' devenant infinis, le rapport $\frac{S'}{M'}$ devient égal à l'unité, et il reste $\frac{S}{M} = K$, ou inversement, S et M étant infinis, le rapport devient $\frac{S'}{M'} = \frac{1.}{K}$. Cette perpendiculaire abaissée du sommet sur l'axe est ainsi le pivot de la relation d'homologie, l'expression condensée en binaire de la relation quaternaire.

Les droites I et J' sont donc équidistantes du milieu de la distance du sommet à l'axe. Quand la constante K = — 1, elles se confondent toutes deux avec la paral-

Cas où les droites limites I et J' sont comprises entre le Centre S et l'axe X



O . I

Homothéti

X J'

La constante d
mologie expri
le rapport
d'homothéti

où les droites limites I et J' sont en dehors de la zone comprise entre le centre S & l'axe X

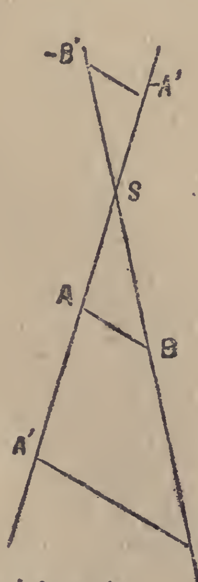


Schéma de l'homothétie

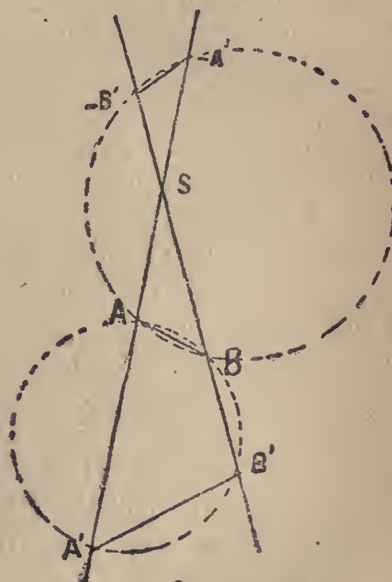


Schéma de l'Inversion

lèle à l'axe menée par le milieu de cette distance. L'homologie est alors harmonique.

Quand la constante est négative, les droites limites I et J' sont comprises dans la région qui sépare le centre S et l'axe X, et les points homologues se trouvent placés de part et d'autre de cet axe. Quand la constante est positive, le sommet S et l'axe X sont situés entre les droites I et J', et les points conjugués sont tous deux du même côté de l'axe X.

Quand le centre S est seul rejeté à l'infini, la relation devient $\frac{M}{M'} = K$, les figures sont en relation d'*affinité* ; les rayons sont parallèles à la direction du sommet, qui est exprimé par la constante K. La projection devient cylindrique. Les lignes à l'infini sont homologues entre elles. Quand l'affinité est en même temps harmonique, le système devient une symétrie par rapport à un plan.

Quand, au contraire, l'axe seul est rejeté à l'infini, la relation se réduit à $\frac{S}{S'} = K$. Les droites homologues sont parallèles à l'axe. C'est l'homothétie. L'homothétie qui est en même temps harmonique devient symétrie par rapport à un point.

Enfin, si l'axe et le centre sont rejetés tous deux à l'infini, les deux figures sont égales et parallèles (ou perspectivement congruentes).

Et, de cette combinaison d'un axe fixe et d'un centre fixe, on déduit comme cas limite l'homothétie (qui peut se déduire aussi de la perspective seule, puisqu'elle relègue l'axe à l'infini), l'affinité et la congruence avec parallélisme. La Proportion Harmonique apparaît à travers ces divers cas comme le principe de l'équilibre

symétrique dont la base est évidemment — 1, c'est-à-dire l'opposition purement qualitative du positif au négatif.

***

Mais le principe de l'homologie, ainsi que l'a montré Chasles, réside dans la perspective. Prenons deux figures ABC et A'B'C', qui sont dans des plans différents P et P' et perspectives l'une de l'autre par rapport à un point central. Les droites AA', BB', CC', qui joignent les points homologues, concourent au point central. Par contre les droites homologues, c'est-à-dire AB et A'B', AC et A'C', BC et B'C', s'intersectent par couples sur une même droite qui est l'intersection des plans P et P'. Si l'on rabat les deux plans P et P' sur un plan quelconque en les faisant pivoter sur leur ligne d'intersection, cette ligne devient l'axe d'homologie. Le point central se projette en un point du nouveau plan qui est le centre d'homologie, point de concours des droites joignant les points homologues.

Mais deux figures homologiques correspondent à une infinité de centres perspectifs, et, réciproquement, deux figures planes en perspective peuvent se rabattre sur une infinité de plans et fournir divers systèmes homologiques. Et l'homologie, vis-à-vis de tous les centres perspectifs de l'espace, est la propriété du plan qui correspond à la propriété de la division anharmonique d'une droite par rapport à tous les centres perspectifs du plan.

***

La perspective simplifie la perception de l'espace à 3 dimensions en confondant les points qui se trouvent sur un même rayon visuel. Elle superpose ainsi une série de plans sur un même tableau, et les distances des objets au sujet percevant disparaissent. L'homologie établit un axe en dehors du sujet auquel se subordonnent tous les objets et le sujet lui-même ; et elle rabat le tout dans un même plan. Les divers objets superposés dans la perspective primitive se juxtaposent alors, et les relations du sujet aux objets et des objets entre eux deviennent explicites. Cela s'opère en transférant à l'axe une part du principe centralisateur dévolu au centre perspectif.

C'est là le schéma d'une opération mentale des plus importantes. Il représente le pouvoir que possède le sujet de se placer en face des objets divers et à de se prendre lui-même comme un objet spécial, objet qui continue de centraliser les rapports existant entre tous les autres,mais qui ne s'oppose plus à eux par un caractère irréductible. La perception concrète et spontanée s'analyse alors en images multiples, comparables entre elles et avec le sujet. Mais cette opération nécessite une base prise hors du sujet,et cette base,c'est l'axe autour duquel ont pivoté tous les plans. Dans la perspective, le sujet figuré par le point central,fonctionne comme unité irréductible et condensée,s'opposant un champ d'images où il simplifie par superpositions.

L'Homologie ne conserve ce pouvoir centralisateur que dans le milieu réduit du plan qui représente le champ des images mentales. L'axe, qui, dans la perspective,apparaissait comme un élément de concentration relative, devient maintenant la norme universelle qui va repé-

rer toutes les relations des objets soit entre eux, soit vis-à-vis du sujet devenu lui-même un objet : base plus abstraite que le tableau perspectif. Ce tableau est le champ des images typiques formées par les impressions les plus répétées et constituées par l'expérience, fournit une condensation et une simplification des objets réduits aux seuls arrêts qu'ils produisent suivant le rayonnement du sujet. L'axe d'homologie est la règle où sont imprimés les concepts fondamentaux résultant des implantations communes aux divers plans des objets, axe indépendant du sujet, qui grave à travers le champ des images les notions *a priori* qui s'imposent au sujet comme nécessaires.

L'Homologie réalise explicitement, suivant les rayons, c'est-à-dire dans toutes les relations d'objet à sujet, la constance du rapport anharmonique, qui n'est manifestée dans la perspective que sur les transversales, c'est-à-dire dans les relations entre objets.

Ici, les objets servent d'intermédiaires entre le support des notions nécessaires et le sujet, devenu centre d'objectivité, qui se trouve intégré sous la loi kosmique. Et le rapport anharmonique apparaît, par le rabattement, sur un plan d'un faisceau de plans; il se révèle ainsi, dès qu'un rayonnement est projeté sur un élément rectiligne, comme le transpositeur de la rotation en translation.

A un point de vue plus objectif, le système homologique du plan ou la division anharmonique d'une droite expriment la norme imposée à tous les impacts des rayons qui émanent de l'espace ou du plan tout entier pour atteindre le plan ou la droite. C'est l'expression synthétique dans l'universel des translations d'un certain ordre (plan ou droite) des rayonnements émanés par la pluralité infinie des

centres de rotation répandus au sein de l'universel d'ordre supérieur. Système Homologique et Division Anharmonique sont comme des plaques et des tiges vibratoires accordées pour un certain mode, et réfléchissant dans un ton défini les projections d'énergie plus ou moins diffuses qui viennent tomber sur elles.

Homographie non perspective

L'homographie dans le cas général est à la perspective ce que la similitude est à l'homothétie. La relation métrique des figures entre elles persiste, tandis que la position qui est leur source disparaît. Néanmoins, comme pour la Similitude, la centralisation géométrique se manifeste encore. Elle est constituée par les points doubles, autrement dit par les points qui coïncident avec leurs propres homologues. Or le nombre des points doubles est égal au nombre de points minimum pour déterminer un élément rectiligne. Il y en a 2 pour l'homographie sur une droite, 3 pour l'homographie dans le plan, 4 pour l'homographie dans l'espace. De là, pour le plan, un triangle, pour l'espace un tétraèdre qui sont communs aux deux figures. Les sommets seuls de ces triangles et de ce tétraèdre sont points doubles ; leurs arêtes et leurs plans sont, comme tels, des éléments doubles. La similitude répond au cas où deux des points doubles (dans le plan) sont les points cycliques ; le 3e est alors le centre de similitude.

S'il y a 3 points doubles en ligne droite (ou 4 points doubles dans un même plan), tous les points de la droite (ou du plan) sont doubles; la droite (ou le plan) devien-

nent axe (ou plan) d'homologie. Un autre point double constitue le centre d'homologie. S'il y a 4 points doubles en ligne droite (ou 5 dans le même plan), les figures coïncident.

***

L'homographie non perspective exprime l'objectivité indépendante. On voit qu'elle est régie par la série tétraédrique, c'est-à-dire que tout système de correspondance un à un entre éléments d'un même ordre gravite autour de la figure rectiligne de contraste maximum successif, figure de périmètre et de capacité minimum, et la plus réduite en sommets.

Les sommets (qui sont les points doubles) indiquent le nombre et la disposition des liens nécessaires pour établir cette correspondance univoque et réciproque entre éléments de même espèce qu'est l'Homographie. Et le contraste maximum successif apparaît, encore ici, comme l'agent qui laisse le plus d'indépendance compatible avec la liaison la plus élémentaire et la plus égale de deux systèmes.

***

Les intersections des rayons homologues de deux faisceaux de centre différents constituent une conique ellipse, parabole ou hyperbole suivant que les deux faisceaux ont zéro, un ou deux couples de rayons parallèles. Dans le cas où les deux faisceaux ont un rayon double, la conique devient une droite, et l'on se trouve dans le cas des figures homologiques.

Analogiquement, les droites communes aux plans homologues de 2 faisceaux de plans décrivent une surface du second ordre, et les points communs aux plans homologues de 3 faisceaux de plans décrivent une cubique gauche.

Les coniques apparaissent comme la résultante, comme la liaison de deux émissions rayonnantes indépendantes réglées par le Rapport Anharmonique. Elles synthétisent les applications de cette même propriété appartenant au faisceau et à la transversale, qui sont l'un et l'autre le support d'un rapport anharmonique déterminé.

Si l'on prend 4 points fixes sur une conique, tous les faisceaux menés en les joignant à un 5e point quelconque auront même rapport anharmonique. C'est la même propriété que celle de la transversale, mais le lieu du sommet, au lieu d'être ici le plan tout entier, est restreint au périmètre de la conique. Il en résulte qu'une conique est déterminée par 5 points. Pour le cercle, deux de ces points sont rejetés à l'infini ; ce sont les points cycliques, points communs à tous les cercles du plan.

La cubique gauche est déterminée par 6 points.

***

Le cône, qui est le principe de toutes les sections coniques est en même temps principe de la perspective à 3 dimensions. Il est remarquable que l'intersection de 2 faisceaux dans le plan de sommets différents s'intersectent justement sur la projection perspective du cône sur un plan. Ne serait-ce pas là le principe métaphysi-

que de la vision binoculaire aboutissant à une image unique et donnant en même temps l'idée du relief ?

Quoi qu'il en soit, le cône est la figure géométrique qui répond à l'essence de la Perspective : un rayonnement émis d'un centre unique. La Perspective subordonne ainsi à l'unité d'un sujet la pluralité des situations de l'espace. Elle transforme le parallélisme en convergence, et obtient ainsi une représentation condensée de l'infini. Elle ramène à deux dimensions l'espace à trois dimensions et répond ainsi, tant au point de vue objectif que physiologique et psychologique, à la représentation d'une réalité concrète par des images plus abstraites qui déforment le concret pour rendre assimilable l'infinité de l'univers à l'unité d'un sujet et former en lui un microcosme.

Les orbites des planètes sont des sections coniques, et cela semble indiquer que la force agissant dans le plan de l'orbite, à laquelle on attribue leur trajectoire, n'est que la composante d'une force émanant du sommet d'un cône dont les orbites sont les sections par un plan. Le système planétaire tout entier apparaîtrait ainsi comme le plan de projection d'un faisceau perspectif ayant pour point central un œil invisible, les corps célestes représentant l'intensification sur ce plan d'une série d'objets multiples et plus subtils répartis sur les génératrices de cette gerbe conique. Et le lien des sections coniques avec l'homographie pourrait faire pressentir que les orbites résultent des intersections des rayons homologues émis par deux centres de forces situés dans leur plan. On voit le nombre de problèmes que peut soulever cette propriété des coniques, problèmes intéressant l'astronomie et l'astrologie.

***

Dans la 3e dimension, les plans homologues de deux faisceaux de plans se coupent suivant une surface réglée du second ordre. Si 3 droites appartenant à la surface réglée passent par un même point, toutes y passent. Ce sont alors des cônes, et l'on rentre dans le cas de la perspective.

Dans le cas contraire, on obtient une surface réglée proprement dite , qui est engendrée concurremment par deux systèmes de génératrices rectilignes. Par un point quelconque de la surface, il passe une seule génératrice de chaque système, et ces deux génératrices sont dans le plan tangent à la surface en ce point; une génératrice quelconque de l'un des deux systèmes n'en rencontre aucune autre de son propre système, et rencontre toutes celles du système opposé. Et, comme 3 droites suffisent pour régler le mouvement d'une droite mobile, une surface réglée peut être considérée comme engendrée par une droite mobile assujettie à rencontrer trois droites fixes (l'une d'elles pouvant être à l'infini).

Ainsi, les surfaces réglées jouent, par rapport aux faisceaux de plans, le rôle rempli par les coniques par rapport aux faisceaux de droites dans le plan. C'est le lieu des droites qui divisent homographiquement deux droites fixes; elles sont donc une généralisation de la Relation Anharmonique. Leur génération manifeste ce caractère de deux couples associés de la même manière que dans la relation anharmonique, et leurs sections par des plans sont des coniques. Si la section par le plan de l'infini est une conique ordinaire, la surface réglée est un hyperboloïde à une nappe (surface en forme de poulie à profil hyperbolique). Si la section par le plan de l'infini se réduit

à deux droites, la surface réglée est un paraboloïde hyperbolique (surface affectant la forme d'une selle). Cela répond au cas où les divisions homographiques sont semblables

Les autres surfaces de second ordre (ellipsoïde, paraboloïde elliptique, hyperboloïde elliptique) ne peuvent contenir aucune ligne droite. Les surfaces réglées représentent, au contraire, la relation réciproque dans l'espace à 3 dimensions de deux divisions homographiques non perspectives.

L'hyperboloïde à une nappe est la surface engendrée par une ellipse variable dont le plan reste perpendiculaire à l'axe imaginaire de deux hyperboles, qui sont les trajectoires décrites par les sommets de cette ellipse. Les deux systèmes de génératrices qui le décrivent par orrespondance homographique forment, autour de cet axe imaginaire, un double tourbillon de lignes droites en sens inverse, dont l'ensemble constitue les sections elliptiques de la surface, toutes semblables, et dont la plus petite est l'ellipse de gorge passant par le point central. Cela suggère l'unification confuse et relative d'une vision qui n'est pas mise au point, ou encore la connaissance sensitive, qui donne des images génériques sans atteindre les concepts. Ce n'est pas le désordre chaotique, mais un système dont l'unification spirituelle n'est pas accomplie et demeure encore virtuelle.

Le paraboloïde hyperbolique est la surface engendrée par une parabole dont le sommet décrit une autre parabole : toutes les deux ayant leur axe parallèle et de sens contraires et leurs plans perpendiculaires. Les deux systèmes de génératrices concourent à réaliser cette vallée cruciale, caractéristique de la figure.

Dans l'hyperboloïde à une nappe, les génératrices sont parallèles deux à deux, et que les génératrices d'un système ne peuvent être parallèles à un même plan ; dans le paraboloïde hyperbolique, les génératrices de chaque système sont toutes parallèles à l'un des plans directeurs, et par contre, il n'y a pas de couples de génératrices parallèles entre elles. La parabole ramène ici toutes les propriétés de l'homothétie comme cas spécial de l'homographie. Cette propriété essentielle se révèle dans une autre génération du paraboloïde hyperbolique. On l'obtient en divisant en un même nombre de parties égales les quatre côtés d'un quadrilatère gauche, et en joignant les divisions correspondantes des côtés opposés. C'est la similitude homographique la plus élémentaire et l'expression la plus simple du quaternaire anharmonique réalisé avec 3 dimensions.

D'autre part, la génération du paraboloïde hyperbolique par les deux paraboles révèle cette surface comme l'une des manifestations fondamentales du constraste simultané maximum dans l'espace à trois dimensions.

La réalisation de ce constraste par 3 axes perpendiculaires, ou par la translation perpendiculaire à l'un d'eux du plan formé par les deux autres, a pour schéma 8 trièdres droits accolés et de mêmes sommets. Cette génération est liée à l'essence du cercle, et à la congruence géométrique. Le paraboloïde hyperbolique substitue à deux des axes les droites de l'infini tangentes à ses deux paraboles : ces courbes remplacent les deux angles droits opposés par le sommet et situés dans des plans perpendiculaires qui sont le germe des 8 trièdes droits. Cette génération est liée à l'essence de la parabole et à l'homothétie.

Le paraboloïde hyperbolique, c'est la croix parabolique dans les 3 dimensions ; c'est le quaternaire du constraste maximun simultané adapté à la similitude, c'est-à-dire compatible avec les différences d'étendue entre objets de mêmes directions.

CHAPITRE III

Transformations et lieux géométriques

Transformations corrélatives

Les transformations homographiques font correspondre des éléments de même ordre dimensionnel : les points aux points, les lignes aux lignes, les plans aux plans. Mais il existe un autre genre de transformations, dites *corrélatives*, par lesquelles on relie les éléments de dimensions différentes entre deux figures, et cela réciproquement, de telle sorte que, dans l'espace à trois dimensions, les points de la 1re figure correspondent aux plans de la 2e, et les points de la 2e aux plans de la 1re. Les droites correspondront alors à des droites. A deux dimensions, les droites correspondent à des points et les points à des droites. On peut étendre le procédé à un espace à n dimension ; les éléments également distants des dimensions extrêmes se correspondent.

La corrélation existe à l'état de germe dans la correspondance entre la division anharmonique des transversales et celle des faisceaux : un faisceau coupé par une transversale établit une relation corrélative entre

les angles et les segments, entre les éléments de rotation et les éléments de translation. Une des manifestations les plus simples qui en découlent c'est la correspondance entre les deux propriétés suivantes : concours de droites en un même point, corrélatif d'une série d'intersections en ligne droite (et, plus généralement, concours de courbes sur une certaine figure, corrélatif de l'intersection de diverses courbes suivant une certaine autre figure.)

Dans l'espace à trois dimensions, une courbe plane a pour corrélative une surface enveloppée par des plans issus d'un point commun, c'est-à-dire par un cône ; une courbe gauche a pour corrélative une surface qui peut s'étaler sur un plan, c'est-à-dire une surface développable.

De même que l'homographie à trois dimensions offre 4 éléments doubles, de même la transformation corrélative établit, dans chacune des figures, 4 points tels que les plans corrélatifs dans l'autre figure coïncident.

Transformation par polaires réciproques

Le faisceau de 4 droites devient, lorsqu'il est harmonique, le fondement d'une des transformations corrélatives les plus remarquables : la *transformation par polaires réciproques.* Un faisceau harmonique de 4 droites dans l'ordre A B C D divise harmoniquement toutes les transversales qu'on lui mène, (donc, en particulier, toutes les transversales concourantes en un point P, pris sur la droite A du faisceau).Toutes les proportions harmoniques relatives à ces transversales auront en commun le point P, qui sera conjugué sur divers points

de C par rapport aux couples de points de B et de D. La droite C tout entière est donc associée au seul point A, par rapport au couple des droites (B,D). A est le pôle, C la polaire ; le couple des droites (B,D) est la directrice. Ce couple de droites est une sorte de conique, et il peut être remplacé par une conique quelconque. La relation est réciproque, car la droite A est la polaire d'un pôle quelconque pris sur la droite C, et le couple des droites (A, C) est la directrice vis-à-vis des droites B et D, prises, l'une comme pôle, et l'autre comme polaire.

On peut enfin généraliser cette transformation corrélative en prenant pour directrices des courbes d'un degré plus élevé : la polaire devient alors une courbe d'un certain degré, et l'on peut avoir un système de pôles distribués sur certaines courbes.

La relation de pôle à polaire, par rapport à une conique, est l'expression la plus élémentaire de la corrélation entre le principe de rotation et le principe de translation. Pour la déterminer, il faut un agent intermédiaire servant de support et participant des deux principes, c'est-à-dire une courbe directrice. La directrice est une sorte de balancier réglant l'équilibre des deux principes extrêmes : l'être individuel et le devenir perpétuel représentés par le pôle et la polaire. Elle sépare le pôle et la polaire, qui sont, l'un intérieur, l'autre extérieur à la courbe. C'est une sorte de membrane à travers laquelle s'accomplit l'osmose par laquelle se relient la rotation et la translation, et c'est la proportion harmonique qui donne la mesure constante de cet échange.

La relation de pôle à polaire représente la proportion harmonique pour ainsi dire sur un plan supérieur, car elle subordonne deux faisceaux entiers de propor-

tions harmoniques à deux foyers mobiles chacun sur les rayons conjugués d'un 3e faisceau harmonique. Ce faisceau fixe est ainsi le fondement unique d'un développement doublement infini du quaternaire harmonique.

Quand la polaire devient tangente à la courbe, le pôle vient au point de contact, et, ainsi considérée à ce point de vue, la tangence n'est plus seulement la fusion de plusieurs intersections en un point multiple, mais en outre la copulation d'une polaire et de son pôle par rapport à leur directrice. Là est la source de la notion d'élément de contact que nous retrouverons plus loin (1).

Degrès et classes des courbes

Il existe dans l'espace à deux dimensions, entre la directrice et les deux facteurs de l'élément de contact (ligne et point), une relation corrélative des plus remarquables. Une courbe (la directrice) peut être considérée soit comme la trajectoire d'un point (pôle devenu point de contact), soit comme l'enveloppe d'une droite mobile (la polaire tangente). Elle peut dériver ainsi soit du mouvement d'un point, soit du mouvement d'une droite. C'est toujours l'opposition des deux principes de rotation et de translation ; mais ici, ils interchangent leurs rôles : le point élément de rotation se meut par transla-

(1) La transformation par polaires réciproques, la notion d'éléments de contact et les relations étudiées ici s'appliquent à l'espace à 3 dimensions. Il suffirait de remplacer les droites par des plans, les courbes par des surfaces. Mais pour simplifier l'exposé et rendre plus aisées et plus schématiques les représentations qui servent à découvrir la métaphysique de cette géométrie, nous nous en tenons à l'espace à deux dimensions.

tion, la droite élément de translation est assujettie à une rotation : translation et rotation qui varient, et par conséquent, s'influencent sans cesse réciproquement. La courbe est donc un élément mixte, qui synthétise la corrélation de la droite et du point. Cette corrélation se manifeste en elle par son degré (ou ordre) et par sa classe.

Le degré (ou l'ordre) d'une courbe plane algébrique est déterminé par le nombre d'intersections maximum (réelles ou imaginaires) qu'une courbe peut avoir avec une droite quelconque. Il exprime donc combien de points en ligne droite une courbe peut donner ; c'est son potentiel en fonction de l'unité de direction, c'est la mesure de son affinité pour l'essence rectiligne. La classe d'une courbe plane est déterminée par le nombre de tangentes (réelles ou imaginaires) qu'on peut lui mener par un point quelconque. Elle exprime le nombre de directions auxquelles une courbe peut satisfaire ; c'est son potentiel en fonction de l'universalité des directions possibles émanant d'un point.

Ces deux coefficients corrélatifs sont entre eux comme n et $n\,(n-1) = n^2 - n$, c'est-à-dire comme un nombre avec le produit de lui-même par le nombre immédiatement inférieur, (ou avec la différence de lui-même avec son propre carré). Les produits et les différences de ce genre, rencontrés dans la genèse des suites de l'icosaèdre et du dodécaèdre, ont été interprétés comme figurant l'écart entre un germe et son éclosion sur un plan supérieur d'existence, et rattachés indirectement à l'algorithme des moyennes raisons qui caractérise l'autonomie individuelle. La classe et le degré auraient, l'un vis-à-vis de l'autre, quelque chose d'analogue avec

la relation d'une quantité avec sa moyenne raison, et cela réciproquement.

Quand n exprime le degré, n^2 exprime le nombre des intersections de la courbe avec une courbe du même degré : cela se conçoit, car cette 2e courbe équivaut à n droites intersectant chacune la première en n points.

Quand n exprime la classe, n^2, éclosion de ce faisceau de tangentes qui constitue la classe, exprime le nombre des foyers. Or la classe exprime une loi applicable à un nombre infini de faisceaux. Le carré de la classe individualise cette loi universelle en un seul système de points déterminés. On saisit ici une fois de plus la nature de l'algorithme des puissances, qui réalise, en individualité sur un plan supérieur, une virtualité universelle du plan inférieur. Ceci vient à l'appui de la thèse réaliste, qui admet l'existence objective des universaux. On peut les concevoir comme des individualités, ou mieux comme des personnalités qui appartiennent à un monde plus concret et se révèlent, dans un monde plus abstrait, comme loi universelle imposée à des individualités de ce monde.

Cette quantité n^2, qui exprime tantôt le système des foyers, tantôt celui des intersections de deux courbes du même degré, est la somme de la classe et du degré. Elle apparaît comme la synthèse de deux complémentaires. La classe et le degré sont comme deux coordonnées déterminant l'allure d'une courbe en fonction de la translation : le degré évalue la courbe par rapport au mode individuel, la classe par rapport au mode universel. La somme de ces coordonnées traduit ainsi la situation de la courbe entre l'individuel et l'universel des translations.

On constate immédiatement que les courbes du 2e degré (coniques) sont en même temps celles de la 2e classe. Elles représentent donc l'équilibre entre les deux relations de la rotation avec la translation considérée en modes individuel et universel. La courbe du 1er degré est la ligne droite, elle est de classe zéro, et réciproquement ; la courbe de la 1re classe, c'est le point, qui est de degré zéro. Ainsi, dans l'espace à deux dimensions, le point et la droite sont complémentaires par rapport à ces deux aspects de la rotation. La droite ici figure comme transversale, le point comme élément de contact.

Les tangentes et les points d'intersections qui déterminent la classe et le degré peuvent être réels ou imaginaires, tous distincts ou quelques-uns confondus ensemble. Et de là résulte des subdivisions dans les familles de courbes répondant à ces conditions variées.

Coordonnées, homogènes, cartésiennes, tangentielles.

Une même équation exprime deux propositions corrélatives, l'une ayant pour objet des points et des intersections, l'autre des droites et des tangentes. Une équation entre n variables exprimera une courbe dans l'espace à $(n - 1)$ dimensions ; l'élément défini par les n variables détermine soit un point de la courbe, soit une de ses tangentes. Dans le premier cas, le degré d'une équation algébrique répond au degré de la courbe ; l'équation du 1er degré exprime donc une droite ; dans le second cas, le degré de l'équation répond à la classe de la courbe et l'équation du 1er degré exprime un point.

De là deux systèmes de coordonnées, le premier déterminant une droite et toute courbe en général par les coordonnées de ses divers points, le second déterminant un point par l'intersection de plusieurs lignes droites ou courbes.

L'homographie, contenant le germe de toute transformation corrélative fournit, comme l'a montré Chasles, ces deux types de coordonnées, types dont les coordonnées usuelles ne sont que des cas particuliers.

On peut prendre pour équation d'une droite une relation homogène et du 1er degré entre les distances d'un point variable de cette droite à 3 axes fixes. Ce point *m* est alors déterminé par ses 3 distances p, p', q aux 3 axes fixes formant un triangle de référence (ou par 3 fonctions définies de ces 3 distances). Ces 3 distances sont les coordonnées trilinéaires du point. Les deux premiers axes peuvent être considérés comme rayons homologues de deux faisceaux ayant pour rayon homologue commun le 3e axe (celui des q). Le point *m* est alors considéré comme appartenant à la transversale qui joint les points d'intersection des rayons homologues des deux faisceaux. On déduit de là la relation homographique

$$\frac{p}{q} + \lambda \frac{p'}{q} = \mu \text{ soit } p + \lambda p' - \mu q = o$$

relation qui donne ainsi 3 coordonnées homogènes p, p', q, ou deux coordonnées non homogènes *p* et *p'*.

Si l'axe des q est rejeté à l'infini, la coordonnée q est infinie pour tous les points ; elle disparaît comme facteur commun dans le rapport des coordonnées $\frac{p}{q}$ et $\frac{p'}{q'}$.
Les coordonnées p et p' sont alors les coordonnées cartésiennes, qui déterminent un point par sa distance à deux axes. Ces deux coordonnées suffisent à déterminer

un point ; la 3e n'a pour résultat que de rendre les expressions homogènes en servant de mesure commune aux deux autres.

Corrélativement, on peut prendre pour équation d'un point une relation homogène du premier degré entre 3 variables représentant les distances d'une même droite à 3 points fixes. Elle passera toujours par le même point représenté par l'équation.

On détermine la position d'une droite qui coupe en *a* et en *b* deux axes fixes limités, S A et S B, par les rapports des segments $\frac{\text{a A}}{\text{a S}}$ et $\frac{\text{b B}}{\text{b S}}$. Ces deux rapports sont les coordonnées de la droite, qu'on peut exprimer par α et β.

Si les points A et B sont rejetés à l'infini, les numérateurs des rapports deviennent infinis, donc égaux ; on peut alors, quand on compare deux rapports, éliminer ce facteur commun et prendre pour coordonnées α et β les valeurs $\frac{1}{\text{a S}}$, $\frac{1}{\text{b S}}$, c'est-à-dire l'inverse des distances de *a* et de *b* au point S, autrement dit l'inverse de l'abscisse cartésienne du point *a* et l'inverse de l'ordonnée cartésienne du point *b*, où la droite *a b* coupe les axes. Telles sont les coordonnées tangentielles de Plücker ; mais dans le cas général, celui où A, B et S sont tous à distance finie, on a 3 coordonnées tangentielles homogènes.

Loi de Dualité

Le principe des transformations corrélatives est exprimé par une loi nommée *loi de dualité*, applicable aux propriétés projectives, c'est-à-dire aux situations géomé-

triques, loi en vertu de laquelle certaine relation entre éléments géométriques de l'ordre $(\frac{n}{2} + p)$ entraîne certaine autre relation qui lui est corrélative entre éléments de l'ordre $(\frac{n}{2} - p)$, de telle sorte qu'il suffit d'établir l'une pour que l'autre soit prouvée. Ainsi, pour passer d'une proposition à la proposition corrélative, il suffit de substituer les noms des éléments corrélatifs entre eux, et d'interchanger les centralisations et les translations. Dans l'espace à 3 dimensions, par exemple, on échangera les points avec les plans (ou les surfaces) et les intersections sur un même plan (ou sur une même surface) avec les concours en un même point. A deux dimensions, les intersections d'une droite avec une courbe C seront corrélatives des tangentes à une courbe C' concourantes en un point.

Cette possibilité a servi d'argument à la thèse nominaliste, qui prétend que les notions d'éléments géométriques sont des notions purement arbitraires et dépendant uniquement des définitions qu'on leur donne. Nous combattrons plus loin cette thèse. Ici, nous chercherons seulement quel est le principe sur lequel est basée la loi de dualité.

L'expression essentielle de la *loi de dualité* est donnée par le développement du binôme $(1 - 1)^n$, sur lequel repose, comme nous l'avons vu, toute la genèse des formes régulières. Dans toute sa pureté, ce binôme donne toute la série tétraédrique et rentre dans le cas de la corrélation birationnelle, les éléments corélatifs se correspondant un à un. Les séries hexa — et octaédrique, où intervient un coefficient étranger, sont des cas de corré-

lation plus complexe, un seul élément de la 1re espèce ayant alors pour corrélatif plusieurs éléments de l'espèce corrélative. Et toutes les formes régulières répondent aux cas de corrélation où les grandeurs des éléments d'une même espèce sont toutes égales et où, par conséquent, toutes leurs données métriques sont toutes représentées par l'unité. Ces formes représentent la synthèse d'une serié de figures corrélatives, puisqu'elles sont constituées par la hiérarchie de tous les couples corrélatifs.

Dans les transformations corrélatives en général, les grandeurs des éléments (et par conséquent, les relations métriques) demeurent indéterminées. On ne retient que la loi même du développement du binôme $(1 - 1)^n$, loi que nous avons étudiée et qui exprime l'équilibre permanent de deux tendances inverses dont l'une croît tandis que l'autre décroît d'un bout à l'autre du développement. Or nous avons vu également que les termes des diverses puissances correspondent aux divers ordres dimensionnels, et que ces deux tendances, dont résultent les figures régulières, sont l'expansion et la centralisation.

C'est là le principe de la loi de dualité; on peut dire qu'il est traduit avec le plus haut degré de généralisation: *l'équilibre essentiel entre l'expansion et la concentration, équilibre qui produit l'espace dimensionnel*, équilibre mobile dont la structure correspond au développement des puissances d'un binôme. A tout rayonnement correspond un enveloppement ; et, nous basant sur les définitions que nous avons données de la rotation et de la translation en fonction de l'individualité, nous pouvons dire que l'individualité se constitue et se

conserve par l'opposition entre une subordination à l'unité du sujet et une séparation établie avec l'universalité des objets.

Le caractère binaire qui se trouve à la racine de l'individualité et à la source de l'espace apparaît encore ici, et l'on voit que l'espace, ainsi que le développement concret de l'individualité, répond aux puissances de ce binaire radical. La corrélation établit le concret en reliant les diverses puissances de ce binaire. Et l'espace, avec ses ordres dimensionnels, est l'ensemble des conditions qui rendent explicites et distinctes les divers degrés d'existence dont la synthèse constitue le concret. C'est par la coexistence de ces degrés et la corrélation qui les relie que l'espace assure la coexistence explicite de cette hiérarchie. La corrélation implique donc au moins deux puissances du binaire radical de la rotation et de la translation, et ainsi, la corrélation dévoile l'essence de lá constitution quaternaire de tout espace, en même temps qu'elle met en lumière la synthèse ternaire de ce quaternaire, synthèse qu'exprime la formule :

$R^2 - 2RT. + T^2$ (le terme 2 RT pouvant s'écrire RT + RT).

*
* *

Les transformations homographiques et corrélatives (et celles de toute nature) peuvent être généralisées et conduire à des relations très complexes. Les concours en un même point, les intersections sur une même droite, les centres de moyennes harmoniques, les pôles uniques, les polaires et les diamètres rectilignes ne sont que les cas élémentaires d'une hiérarchie de relations où les mêmes fonctions sont remplies par des courbes de divers

degrés et par des systèmes de points. Mais les cas élémentaires ont le privilège de mettre en lumière l'essence géométrique des transformations ; ils ne retiennent du nombre que le minimum inséparable de la relation géométrique elle-même. Leur étude suffit donc ici.

Les généralisations introduisent les développements du Nombre dans la relation géométrique en faisant jouer par des éléments multiples les rôles remplis chacun par un seul élément dans la relation simple. Elles font intervenir dans la géométrie l'algorithme des combinaisons. Mais, par ces combinaisons, le nombre atteint certaines valeurs remarquables qui se révèlent géométriquement par des figures typiques ; ces valeurs et ces figures servent de voies et moyens pour l'accomplissement de la finalité au sein de la quantité par la Forme et le Nombre, considérés comme qualités.

Un ensemble des transformations corrélatives peut être remplacé par une seule transformation, qui est homographique ou corrélative, suivant que le nombre des transformations successives est pair ou impair. C'est une sorte d'oscillation binaire analogue à l'alternance des signes des puissances d'une quantité négative. Et en effet, chaque transformation corrélative étant le passage d'une dimension A à une dimension B, un nombre égal d'aller et retour ramène à la dimension initiale.

La possibilité de pouvoir substituer à tout le cycle des transformations opérées la relation directe entre deux transformations quelconques et, par conséquent, de relier directement deux transformations extrêmes est ce qui définit un *groupe*. La notion de groupe implique

donc un cycle fermé et, par conséquent, le principe de rotation.

Les transformations homographiques et corrélatives répondent donc à des propriétés synthétiques de l'espace, tendant à établir des relations définies entre les éléments qui s'y trouvent. Les transformations homographiques relient les éléments d'un même ordre dimensionnel, et constituent pour ainsi dire l'équilibre de niveau dans chaque ordre dimensionnel. Les transformations corrélatives, au contraire, rendent réciproquement solidaires les divers ordres dimensionnels ; elles réunissent les ordres supérieurs aux inférieurs, et équilibrent de haut en bas cet ensemble, en associant les ordres par couples, qui s'enveloppent comme dans une involution à puissance positive. Elles établissent une pondération entre les tendances centralisatrices et les tendances expansives. Les espaces à nombre impair de dimensions contiennent un ordre médian qui se transforme en lui-même par corrélation. Ils présentent ainsi un caractère de contraction, tandis que les espaces à nombre pair de dimensions sont entièrement épanouis. Nous avons déjà constaté ces caractères en étudiant les polyèdres.

Ainsi, le groupe des transformations homographiques et corrélatives représente deux modes fondamentaux de relations qui constituent toute organisation et toute vie : attaches entre individus de même espèce, solidarité entre individus de divers ordres hiérarchiques. Nous avons là le schéma de deux grandes lois qui régissent le Kosmos tout entier, mais dont le jeu synthétique nous est particulièrement manifeste en biologie et en sociologie. Et c'est la corrélation qui paraît l'emporter ici sur l'homographie, car la vie chez les êtres

supérieurs s'accomplit principalement par des réactions de la périphérie au centre et du centre à la périphérie. L'homographie apparaît dans le balancement des organes, mais sa manifestation principale consiste à se substituer à la corrélation en vertu de la propriété que possède un groupe de relier deux transformations extrêmes en supprimant les intermédiaires. A ce titre, l'homographie est représentée par toutes les abréviations qui permettent à la vie une économie d'effort : accélération embryogénique, phénomènes réflexes, habitude, instinct, etc., qui rapprochent les deux termes extrêmes de l'impression et du mouvement.

Transformations quadratiques

Deux transformations corrélatives d'une même figure plane (F) font chacune correspondre une droite à un point M de (F). Ces deux droites s'intersectent en un point M', qui est le transformé quadratique du point M. Ainsi, la transformation quadratique s'obtient par l'intersection de deux transformations corrélatives. Elles établissent une correspondance univoque de point à point. Mais cette correspondance est indirecte ; elle s'offre comme une résultante, comme une condensation de deux transformations corrélatives : c'est un retour de l'ordre ponctuel sur lui-même par la polarisation d'une double expansion linéaire.

8 points donnés et 8 droites corrélatives assujetties à passer par 8 points donnés définissent une transformation corrélative. Si l'on n'a que 7 couples de points, il y aura une infinité de droites corrélatives pour un 8ᵉ point M, qui toutes passeront par un même point M'.

M et M' réalisent la transformation quadratique, qui se trouve ainsi définie par 7 couples de points correspondants.

Or, entre deux corrélations, il y a 3 points ou *pôles* ayant les mêmes droites pour corrélatives dans les deux systèmes. Dans la transformation quadratique, il y aura donc 3 points dont les homologues demeurent indéterminés sur ces droites, qui se nomment *droites singulières*. Les intersections de deux d'entre elles correspondent à tous les points de la droite qui joint les deux pôles correspondants. Donc, dans chacun des systèmes en correspondance quadratique, il y a 3 pôles, A B C, A'B'C', formant respectivement deux triangles principaux. A chaque pôle correspond ainsi le côté opposé du triangle. Au sein de la transformation quadratique, qui établit une correspondance de point à point, les pôles, eux, correspondent à des droites et maintiennent intacte une transformation corrélative, qui sert de pivot au système entier.

***

On peut amener deux systèmes semblables en situatio d'homothétie en faisant coïncider les sommets et un couple de rayons homologues. On peut amener deux systèmes homographiques en situation perspective en faisant coïncider les sommets de leurs faisceaux homologues. On peut aussi, par une transformation homographique, faire coïncider, dans deux systèmes en correspondance quadratique, les triangles, droites et points *principaux*. On obtient alors une transformation qua-

dratique de second ordre, avec 3 pôles formant un triangle *fondamental.*

Cette transformation devient alors involutive, car les faisceaux A et A' se trouvent réciproques. Une telle transformation est définie par son triangle fondamental et par un couple de points conjugués. Les trois droites fondamentales constituent les diagonales du quadrilatère formé par les 4 points doubles, cela parce que les rayons correspondants de deux couples de faisceaux s'intersectent suivant deux coniques, et que celles-ci se coupent en 4 points.

L'inversion ordinaire n'est qu'un cas particulier de l'inversion quadratique.

Dans la transformation quadratique, à un point M décrivant une droite correspondent, dans les deux corrélatives dont la réunion forme la correspondance quadratique, deux droites décrivant chacune deux faisceaux homographiques, et dont les rayons homologues se coupent sur une conique passant par les pôles et qui est la transformée de la droite M.

Les droites de l'infini de chaque système ont pour transformée une conique circonscrite aux points principaux. La conique transformée d'une droite quelconque sera hyperbole, ellipse ou parabole, suivant que cette droite rencontre la conique transformée de la droite de l'infini en deux points réels, imaginaires ou confondus.

Ainsi, une droite se transforme en une conique passant par les pôles, et généralement, à une courbe de degré n correspond une courbe (C') de degré $2n$ passant par les pôles, car toute conique circonscrite au triangle fondamental coupe (C) en $2n$ points ; et, comme la transformée d'une telle conique est une droite, cette droite

coupera (C') aux 2 n points correspondants. Les pôles sont, pour (C'), des points multiples de degré n, car chacun d'eux correspond aux n points d'intersection de (C) avec le côté du triangle fondamental.

Le degré de (C') s'abaisse quand M passe par un des pôles, et le degré de multiplicité des autres pôles sur (M') s'abaisse du même nombre.

Ainsi, une droite issue du pôle A a pour transformée une droite issue du même pôle. Une conique a pour transformée : 1° si elle passe par les trois pôles : une droite, 2° par deux pôles : une conique passant par ces pôles, 3° par un pôle : une cubique passant par les deux autres et ayant pour point double le premier. Une conique ne passant par aucun pôle a pour transformée une quartique admettant les pôles pour points doubles.

Ainsi, l'essence de la transformation quadratique ponctuelle consiste à transformer une courbe quelconque en une courbe de degré double assujettie à passer par les 3 pôles.

Le point se transforme en point, mais le 1er point est donné comme simple distance sur une droite déterminée ; son transformé résulte de l'intersection de deux droites : c'est en quelque sorte un point du second degré. Et ainsi, les éléments points suivent la même loi que les éléments lignes.

Doubler le degré d'une courbe, c'est doubler le nombre de ses intersections possibles avec une droite. Or, chaque fois qu'une courbe traverse une ligne droite (que cela s'opère par des inflexions, par des rebroussements, par des boucles ou par des circonvolutions spirales), elle oscille autour de la direction fixée par cette droite, qui joue à son égard une fonction axiale plus ou moins

prononcée. En élevant son degré, une courbe se rapproche de la translation pure à laquelle elle subordonne, de plus en plus et suivant des modes variés, le principe de rotation pure représenté par tous ses cercles osculateurs.

*
* *

La transformation quadratique est caractérisée, à ce point de vue, par la subordination de la rotation élémentaire à la translation en général. Il s'agit de la translation en général et non d'une certaine translation orientée, cas représenté par les asymptotes sous forme individuelle, et par les directions asymptotiques sous forme universelle.

Si la transformation quadratique se bornait à transformer une courbe de degré m en une courbe de degré $2m$ sans déterminer sa situation, elle constituerait une progression sans fin et irréversible ; car la courbe de degré $2m$ aurait à son tour pour transformée une courbe de degré $4m$, et non la courbe de degré m qui a servi de point de départ.

Mais la transformée d'une courbe ne passant pas par les pôles est assujettie, elle, à passer par les pôles.

Or les 3 pôles déterminent un cercle unique. Toute transformée aura donc 3 points d'intersections avec un même cercle. Et ainsi, le principe de rotation fixé et déterminé par ce cercle équilibre la tendance vers la translation marquée par l'élévation du degré des courbes. C'est le facteur 2, c'est-à-dire le degré qui caractérise le cercle, qui est le multiplicateur des degrés des courbes. L'équilibre entre la translation et la rotation (équilibre sans lequel il n'existe plus d'espace, mais seulement du

temps), se réalise ici sous une forme nouvelle et fort curieuse. Si les courbes élèvent leur degré, c'est à la condition de graviter toujours autour du même centre. et même de se nouer toutes ensemble sur 3 points fixes.

Les cas particuliers où la courbe primitive passe par un ou deux des pôles, et pour lesquels le degré de la transformée s'abaisse du même nombre, ne font que mieux affirmer ce balancement équilibré.

La transformation quadratique que nous venons d'étudier n'est que la plus simple de toute une série de transformations se rattachant au même principe. Ce principe est celui de la combinaison de la translation axiale, c'est-à-dire de la translation pure sous son mode le plus élémentaire, avec la translation périphérique, c'est-à-dire de la translation opérée par l'action rotatoire. La similitude conduisant aux spirales nous a montré une combinaison de ces deux principes, mais une combinaison où le principe de rotation domine et imprime au développement périphérique un sens toujours le même, le centre de rotation demeurant fixe et la translation ne se manifestant que par la croissance du rayon ou la tendance de la courbe vers sa tangente. Et cela a donné lieu à tout un groupe de courbes transcendantes. Mais l'élévation du degré des courbes algébriques, ainsi que d'autres groupes de courbes transcendantes, telles que les courbes trigonométriques, montrent au contraire le centre de courbure se déplaçant en translation et en général oscillant autour de certains axes.

Il semble que l'embryologie nous fournisse des exemples se rattachant aux transformations quadratiques, En effet, de nombreux organes ont pour origine des

masses plus ou moins ovoïdes, qui ensuite se replient en surfaces courbes de plus en plus sinueuses, formant des diverticules et des lobes multipliés, et cela dans une enveloppe peu variable ; et il serait curieux de savoir si, à travers ces transformations successives, la surface variable n'est pas assujettie à passer par certains points d'attache demeurant fixes.

De plus, cette captation des courbes que leur transformation assujettit à passer par les 3 pôles, liée au doublement du degré des courbes, est un schéma remarquable d'une loi fondamentale de l'univers, la complexité croissante des mouvements quand on les fait se rencontrer sur les mêmes points. Ici, le cofficient de complexité est le plus net et le plus simple possible: c'est 2, le principe des contrastes et des rythmes, et cela fait pressentir que les transformations quadratiques doivent être fondamentales dans l'économie kosmique.

Lieux géométriques et transformations

On appelle lieu géométrique l'ensemble des éléments spatiaux qui satisfont exclusivement à une relation donnée. Le lieu géométrique représente une sélection opérée au sein de l'étendue, et cette sélection s'exprime dans sa synthèse par une figure, définie par une loi qui est son verbe.

Le lieu géométrique implique la double notion de coexistence et d'exclusion, qui est le fondement de l'espace. La coexistence ici est donnée par la pluralité des éléments qui jouissent de la propriété considérée ; l'exclusion, par la forme définie qui prive de cette propriété

tout autre élément de l'espace. Un lieu géométrique subordonne en général une pluralité d'éléments spatiaux à une idée unique. Il représente toujours une synthèse dont le principe unificateur est souvent représenté par un élément ou par un système restreint à quelques éléments.

Voici, à titre d'exemples, l'énoncé de quelques lieux géométriques très simples et remarquables, relatifs à la relation constante des distances à deux point fixes :

Cette relation est la somme (ellipse), la différence (hyperbole), le produit (lemniscate), le quotient (cercle), la somme des carrés des distances (cercle ayant pour diamètre la droite qui joint les points fixes).

***

Les transformations constituent un système de lieux géométriques pour ainsi dire réciproques. Dans le lieu géométrique, un nombre infini (ou tout au moins plural) d'antécédents est associé à un même groupe restreint (ou à un seul) de conséquents. Dans une transformation, deux figures, c'est-à-dire deux ensembles continus d'éléments géométriques sont coordonnés réciproquement : les antécédents et les conséquents sont des pluralités, et les conséquents changent quand les antécédents changent.

L'unification centralisatrice régit les lieux géométriques ; la réciprocité régit les transformations. Mais le principe centralisateur existe encore dans les transformations. Il y est représenté par les éléments centraux et par les éléments multiples. Les éléments centraux réalisent la centralisation absolue ; ils ont pour corres-

pondant l'élément à l'infini, et ainsi se trouvent équilibrées les deux manifestations extrêmes de la rotation et de la translation. Les éléments multiples réalisent de la centralisation avec de l'étendue ; ils consistent dans la coïncidence de plusieurs éléments correspondants Ce sont les éléments de fusion et d'identification partielle entre les figures.

Développées et podaires

La distinction entre les lieux géométriques et les transformations n'est pas radicale. Certaines relations peuvent se définir soit comme lieu géométrique, soit comme transformation. Telles sont les développées et les podaires.

Pour nous en tenir aux courbes planes, la développée d'une courbe est le lieu dè ses centres de courbure. Elle exprime la synthèse des centres de rotation de la courbe en chacun de ses points. Tous les rayons de courbure sont tangents à la développée ; cette courbe est donc aussi la synthèse des directions des rayons de courbure. Or les directions de la développante sont, en chaque point, celles des tangentes aux cercles osculateurs,et ces tangentes sont perpendiculaires aux rayons de courbure qui expriment les directions de la développée. Développante et développée sont donc composées de points correspondants qui sont entre eux des infiniment petits de perpendiculaire. Cette correspondance homographique entre les deux courbes exprime la synthèse de la perpendicularité sous forme réciproque.

*
* *

Si, d'un point fixe, on abaisse les perpendiculaires sur les tangentes à une courbe, le pied de ces perpendiculaires constitue une courbe qui est la *podaire* de la primitive. La podaire réalise toutes les directions perpendiculaires à celles de la courbe, puisque les directions de la courbe sont celles de toutes ses tangentes. La podaire est une correspondance corrélative. C'est la synthèse de la perpendicularité sous forme d'une courbe subordonnée à un pôle.

Citons deux exemples. La podaire d'une conique par rapport à l'un de ses foyers est un cercle ; si la conique est une parabole, le cercle devient une droite. Le limaçon de Pascal est la podaire du cercle.

Si l'on construit la podaire de la podaire, et si l'on superpose ainsi une série de podaires, tous les points correspondants qui sont point de tangence par rapport à l'une des courbes, et pied de perpendiculaire par rapport à la podaire de cette courbe, sont situés sur une spirale logarithmique ayant pour pôle celui de toutes les podaires. On réalise ainsi une de ces courbes qui opèrent la transition entre la rotation et la translation, en combinant le parcours périodique d'un cycle qui passe par toutes les directions avec l'accroissement du rayon vecteur. Cette courbe tend vers la translation sans jamais l'atteindre, et développe une rotation sans fin, qui ne se clôt jamais.

Développées et podaires sont les expressions curvilignes les plus remarquables du principe de la perpendicularité ; leur différence a quelque analogie avec celle qui distingue la série hexaédrique de la série octaédrique.

Eléments de contact

Les transformations corrélatives font parfois correspondre des éléments qui sont en contact. Ainsi, lorsque la polaire d'un point devient tangente à la conique directrice, le pôle vient au point de contact. Or ce point situé sur la conique appartient en même temps à la droite tangente. C'est là ce qui définit son caractère de point de contact. Considéré isolément comme appartenant à la conique, il pourrait provenir de l'intersection d'une sécante. A trois dimensions, la droite tangente serait remplacée par un plan tangent. On peut donc caractériser la tangence dans l'espace à trois dimensions par l'ensemble du point de contact et d'une portion infiniment petite du plan tangent en ce point : c'est cela qu'on nomme *élément de contact*.

Le point d'intersection de deux courbes ou d'une courbe avec une surface, ou encore deux points qui coïncident peuvent être aussi associés à cet élément plan et constituer un élément de contact. Ces diverses conditions où la distance entre deux figures devient nulle, sont toutes comprises dans la notion d'élément de contact, et l'on appelle transformation de contact celles qui conservent la relation définie par l'élément de contact.

Les transformations homographiques et corrélatives, et notamment celles des podaires, jouissent de cette propriété. Mais il y en a bien d'autres.

La notion d'élément de contact permet de considérer les surfaces comme formées, non plus comme un lieu de

points mais comme l'ensemble de toutes les sphères qui ont un contact avec elles.

On établit alors des correspondances entre un espace constitué par des sphères qui ont un élément de contact commun et un autre espace constitué par des droites qui émanent d'un point commun (figure nommée *complexe de droites*), puis on cherche le lieu des divers éléments de contact qui correspondent à tous les éléments de contact d'un point unique. Si ce point appartient à l'espace des droites, il a pour correspondant une génératrice rectiligne de sphère, c'est-à-dire une droite isotrope. Si ce point appartient à l'espace des sphères, il a pour correspondant une droite réelle. Dans cette transformation, les droites se transforment en sphères. Ce sont les transformations de Sophus Lie qui ont une grande importance dans le calcul différentiel, mais sur lesquelles nous n'insisterons pas ici.

*
* *

La tangence se définit généralement comme la limite des positions d'un élément sécant, et représente le cas où les éléments d'intersection viennent se fusionner en un élément multiple. Mais cette définition, comme toutes les définitions par les limites, fait concevoir une chose comme la finalité d'une autre, mais elle n'en exprime pas l'essence. La notion d'élément de contact atteint, au contraire, la notion de tangence par une voie inverse: celle de l'évanouissement de la distance entre deux figures, évanouissement dont le cas le plus élémentaire consiste dans le contact par un point unique, et ce contact ne peut être déterminé qu'en associant ce poin à l'élément géométrique rectiligne de dimension (n — 1).

Toute association du point à un élément curviligne outrepasse le caractère de tangence en un point, et tend vers un autre type, l'osculation, type réalisé par l'élément de rotation pure, la sphère, et qui donne un contact plus intime que la tangence, une tangente continue entre deux éléments infiniment voisins.

Enfin, la tangence suivant la surface tout entière, qui rend cette surface commune aux deux figures, constitue une nouvelle étape des contacts, transformant en réalisation la tendance au contact superficiel qui caractérise l'osculation.

Dans l'espace à deux dimensions, le même processus s'accomplit entre la tangente, le cercle osculateur et le contact linéaire.

La tangence apparaît ainsi comme tout à fait distincte des intersections par des sécantes. Sans doute, le plan qui ne rencontre pas une surface peut être considéré comme le lieu de sécantes imaginaires, et à ce point de vue, la tangence pourrait se définir comme cas limite des intersections imaginaires. Mais cette conception est tout à fait différente de celle des contacts. La notion des intersections limites est fondée sur la discontinuité et le nombre ; elle part d'un nombre fini de points distincts : ces points se rapprochent et, à la limite, ils occupent tous le même lieu géométrique, qui acquiert ainsi une intensité égale à la somme des points qui sont venus s'y superposer : c'est un point multiple. Rien de pareil dans la notion d'élément de contact, mais seulement la corrélation entre deux éléments géométriques dont la distance est nulle. Ici, le plan qui environne le point quelconque, loin d'être constitué par les points voisins qui se rapprochent, est une sorte d'émanation

du point de contact ; il représente la phase inverse de celle qui fait atteindre aux plans sécants le cas limite. Le plan de l'élément de contact semble, au contraire, diffuser en continuité l'intensité du point multiple condensé par discontinuité. Cette notion est un symbole remarquable de la fusion des métaux, qui font passer une agglomération solide, plus ou moins discontinue, à l'étatde masse continue et de forme homogène.

De plus, la notion de contact, liée à celle d'osculation, se conçoit comme résultat d'une tendance toute différente de celle des intersections. Par les intersections, une forme en pénètre une autre. Toutes deux ont certaines de leurs parties dans un lieu commun, mais le contraste des directions propres aux deux figures persiste. Il y a évanouissement de la résistance matérielle marquée par la distance, mais séparation absolue des idées et des actes auxquels répondent les directions. La tangence, comme cas limite, est alors une élimination graduelle de l'identité de lieu et du contraste de direction. Au contraire, dans les contacts, il y a évanouissement de distance, mais en même temps fusion des directions au point de contact, fusion prolongée virtuellement et comme par un désir dans l'osculation, sorte de baiser que se donnent les formes. Par contre, il n'y a pas pénétration, la distance ne s'évanouit que sur l'enveloppe ; les deux figures en contact ne se croisent pas, si ce n'est par inflexion. C'est dire que les rayonnements émanant de leurs centres de courbure ne se pénètrent jamais en sens inverse.

***

Les contacts représentent donc le summun de synthèse réalisable à la fois par la matière et par l'idée demeurant distinctes. Les intersections établissent une plus grande pénétration de la matière, mais avec conflit de l'idée. Seule la superposition, dont le degré ultime consiste dans la congruence (ou égalité géométrique), réalise la fusion de la matière et de l'idée des deux figures en fusionnant les individus. On peut encore alors concevoir la matière et l'idée de chacune des deux figures comme distinctes, bien qu'occupant le même lieu; alors, le résultat est une figure complexe, se qualifiant ou s'intensifiant suivant que cette distinction demeure explicite ou devient implicite. Ces deux cas extrêmes répondent à la perception synthétique et à l'impression dynamique, leur alliage à la sensation.

Les éléments de contact sont ainsi le dernier vestige de la congruence, la congruence réduite à un point et à son rayonnement inétendu. Et les transformations de contact évoquent le régime vibratoire à son degré le plus élémentaire. Elles permettent les dissemblances les plus grandes entre les figures correspondantes, et les associent seulement par ces congruences d'infiniment petits, caractérisées par l'évanouissement de la distance. Elles sont le schéma de l'unisson vibratoire allié à la diversité des timbres,et chaque individu colorant le chant universel de caractère propre.

Les notions de contact et d'intersections reçoivent une généralisation nouvelle dans la topologie, en même temps que les figures géométriques sont de plus en plus altérées par les transformations. La topologie efface la pluralité des éléments définie par les angles. Elle ne considère que les communications spatiales; et les rela-

tions fondamentales qui en font l'objet sont les contiguïtés et les coupures. Ce n'est là qu'une extension à des éléments étendus : ligne, surface, etc. de la distance nulle réalisée entre des points, dans les contacts et les intersections. Les figures closes sont alors le lieu d'un centre indéterminé de rotation renfermé dans une certaine zone ; les chemins réalisent une translation n'ayant pas de loi propre et ne tenant sa détermination que du milieu où elle s'opère.

Invariants

Il y a des figures tout entières qui, dans une inversion, sont leur propre transformée ; elles servent pour ainsi dire de pivot dans la transformation. On les dit *anallagmatiques*. Toute courbe anallagmatique, dans une inversion, est l'enveloppe d'une série de cercles qui coupent orthogonalement un cercle fixe ayant son centre au centre d'inversion et, pour rayon, le module de transformation. Le lieu des centres de ces cercles est une courbe dite *déférente* de l'anallagmatique. C'est là une généralisation de ce que fournit l'involution et les faisceaux de cercle. (La déférente répond à la base d'involution.)

Comme courbes anallagmatiques, on peut citer : le cercle, la strophoïde, la cissoïde, le limaçon de Pascal, les ovales de Cassini, les quartiques bicirculaires ou circulaires à points doubles, et comme surface, la cyclide de Dupin, qui est la transformée du tore.

Ainsi, à travers les différences de qualités qui résultent des relations spatiales, certains caractères demeurent intangibles. La nature offre, dans tous les ordres

évolutifs, de pareils objets qui demeurent réfractaires aux influences variables de certains milieux. La notion d'anallagmatisme, dans la physique, dans la biologie, dans la sociologie, doit avoir un rôle important, Peut-être rendrait-elle compte de ces situations privilégiées de certains équilibres, systèmes de mouvements, structures des corps, fonctions biologiques, caractères morphologiques, ethniques ou psychiques, qui restent inébranlables à travers les renversements des conditions ambiantes.

On exprime une figure transformée en fonction de la figure primitive, par le symbole de celle-ci affecté d'un coefficient qui caractérise la transformation. Cette représentation n'a rien de conventionnel ; elle s'impose par la nature même du concept, car tout coefficient indique un modificateur de l'objet auquel il s'applique. Les produits algébriques peuvent, à un certain point de vue, être considérés comme un cas particulier de ces modifications. Leur symbole peut donc servir à exprimer des transformations ; mais on ne doit pas déduire de là sans vérification que les lois des produits s'appliquent aux transformations. On sait que la multiplication algébrique appliquée aux quaternions, continue d'être associative, mais cesse d'être commutative. C'est justement ce qui a lieu pour les transformations : on peut grouper en une seule plusieurs transformations successives, mais on ne peut pas toujours intervertir leur ordre. Elles ne forment pas nécessairement un cycle et peuvent conduire à une série sans fin. Tel serait le cas d'une transformation doublant le degré des courbes sans astreindre les transformées à passer par des points fixes, comme dans les transformations quadratiques.

On dit qu'un ensemble de transformations forme un groupe lorsque le produit de deux quelconques d'entre elles appartient à l'ensemble. On peut ainsi schématiser un groupe par un polygone inscrit dans un cercle, les sommets répondant aux figures qui s'obtiennent par les diverses transformations, et les transformations répondant aux cordes menées entre les sommets, et constituant le polygone convexe et le polygone étoilé.

On appelle invariant du groupe l'élément qui persiste à travers toutes les transformations du groupe. Il représente l'élément immuable nécessaire à toute synthèse ; il peut consister soit dans la fixité d'un centre d'un axe ou d'une figure, soit dans une relation. Ainsi, dans la transformation homographique, un système de 3 points n'a pas d'invariant, mais un système de 4 points a pour invariant fondamental le rapport anharmonique.

L'invariant d'un groupe, c'est l'élément centralisateur qui relie tout un système de transformations. Et, comme nous le verrons plus loin, toute géométrie implique un invariant ; car c'est là ce qui établit le caractère immuable d'un espace, caractère sans lequel on ne pourrait concevoir ni situations ni étendue.

CHAPITRE IV

Étendue et Situation

Toute relation géométrique se compose d'une donnée d'Etendue (translation) et d'une donnée de Situation (rotation). L'Etendue répond au caractère exclusif de l'individualité ; tantôt elle se présente comme le domaine spatial que s'approprient les individus : elle constitue alors la grandeur dés figures ; tantôt elle se manifeste comme le domaine universel qui borne et isole les individus : elle constitue alors les distances. La Situation se rapporte tantôt au milieu universel de l'espace, pour établir les relations qui édifient la synthèse des individus entre eux, tantôt aux parties d'une figure pour établir les relations qui en définissent le type individuel.

L'Etendue est l'objet principal de la Géométrie Métrique la Situation est l'objet principal de la Géométrie de Position. Mais aucune relation ne peut être géométrique, si elle ne comprend à la fois une donnée de situation et une donnée métrique. L'absence de toute donnée de situation réduit la géométrie à de l'algèbre pure ; l'absence de toute donnée métrique transforme la géométrie en esthétique. Ce qui distingue la Géométrie de Position de la Géométrie Métrique, c'est la prépondérance de l'une de ces deux données et l'indétermination relative de l'autre.

Il est clair que toute donnée métrique : congruence (égalité géométrique), similitude, homographie, impliquent toutes des relations de situation, puisque la propriété métrique énoncée s'applique toujours à certaines situations plus ou moins déterminées. Et, d'autre part, toute situation géométrique implique une relation métrique plus ou moins déterminée, puisqu'elle est exprimable par une équation. Cette union étroite entre l'Etendue et la Situation a donné lieu à deux thèses opposées, cherchant à absorber l'une de ses propriétés dans l'autre. On a soutenu, d'une part, que la Géométrie de Position ne contenait aucune donnée métrique, et l'on a prétendu d'autre part, que la Géométrie n'est qu'une partie de l'Analyse Algorithmique, et les éléments géométriques rien de plus que des noms arbitraires attribués à certains éléments et à certaines fonctions algorithmiques. Il importe donc de montrer en quoi ces deux thèses sont défectueuses.

La Géométrie de Position et la Géométrie Métrique

La Géométrie de Position se présente sous deux formes équivalentes, comme Géométrie Descriptive ou comme Géométrie Projective. La Géométrie Descriptive considère la ligne droite comme un segment limité ; la relation fondamentale qui lui sert de base est la situation d'*inclusion* qui, sur la ligne droite, c'est-à-dire en fonction de la translation pure, se réduit à la relation d'être situé *entre*... Cette notion implique un rapport d'étendue générique entre 3 éléments : celui de plus grand ou plus

petit. La Géométrie Projective considère la ligne droite comme un cycle fermé à l'infini ; sa relation fondamentale est la *séparation,* c'est-à-dire une réciprocité liant deux relations *d'entre...* Cette notion implique un rapport métrique entre 4 éléments : la Relation Anharmonique. Mais, d'autre part, la notion de séparation peut être considérée comme primitive ; elle sert alors de base à la forme la plus élémentaire des notions de situation, et donne le germe de la qualité par l'opposition du positif et du négatif. A ce point de vue, la notion *d'entre* répond à la même fonction. Mais, dans la notion de séparation, l'activité est attribuée à l'élément qui sépare, dans la notion *d'entre,* il apparaît comme passif.

Ces deux géométries traitent des mêmes questions. Leur donnée primitive est exprimée, pour la Descriptive, en fonction de la translation, pour la Projective, en fonction de la rotation. Toutes les deux laissent de côté les notions de mesures individuelles (congruences, distances, capacités); mais elles impliquent néanmoins des relations métriques plus ou moins déterminées.

Et d'abord, les simples notions d'inclusion, de dedans et de dehors, impliquent la notion de plus grand et de plus petit, donc une donnée d'étendue et même une mesure approximative, par l'évaluation d'une limite supérieure assignée à la plus petite des grandeurs. En même temps, l'inclusion évoque la situation, car elle divise l'espace en deux régions, l'une subordonnée à la rotation, l'autre à la translation.

*
* *

Mais, en outre, tout lieu géométrique implique des notions métriques plus précises et souvent exprimables par des fonctions explicites. Dire qu'un lieu géométrique répond à un angle donné, c'est indiquer une relation de mesure angulaire. Dire que le lieu géométrique répondant à telle relation de pure position est telle figure, par exemple une conique, c'est indiquer immédiatement un certain nombre de relations métriques entre les divers points du lieu. Ces relations embrassent des paramètres indéterminés, puisque, suivant les cas, la conique peut être une ellipse, une hyperbole, une parabole, un cercle ou deux droites, et cela avec des situations, des excentricités et des grandeurs diverses ; mais il demeure toujours certains rapports métriques inhérents à toute conique.

Les alignements n'échappent pas à l'ingérence des relations métriques, car ils sont liés à la relation anharmonique entre 4 points, ou à l'involution entre 6 points.

Les points de concours, les intersections, les contacts, les contiguïtés et les coupures impliquent toute la notion métrique de distance nulle.

Ainsi, une donnée d'étendue est toujours liée à une relation de situation, mais ce qui caractérise la géométrie de Position, c'est qu'elle considère les éléments Géométriques qui découlent immédiatement de l'essence de l'espace en demeurant aussi loin que possible des cas spéciaux répondant aux valeurs métriques remarquables. Et les figures plus ou moins typiques s'introduisent dans la Géométrie de Position, non en vertu de ces prérogatives métriques, mais comme résultante des combinaisons des éléments simples de l'espace s'associant suivant certaines conditions.

Les coniques, par exemple, ne figurent pas ici en vertu d'une relation de distance avec deux foyers, ni même comme sections d'un cône, mais plutôt comme intersections des rayons homologues de deux faisceaux, etc.

Les objets propres de la Géométrie de Position sont avant tout 1° les collections d'éléments simples, c'est-à-dire la *ponctuelle*, ensemble discontinu de points formant une ligne, 2° le *faisceau de rayons* et la *gerbe de surfaces*, collections de lignes ou de surfaces passant par un point commun, 3° le *faisceau de surface*, collection de surfaces passant par un même axe. Ces formes sont de 1re espèce, parce qu'elles ne sont formées que par une sorte d'éléments. Elles peuvent être engendrées les unes par les autres. Ainsi, la ponctuelle peut être considérée comme section d'un faisceau de lignes, le faisceau de lignes comme section par une surface d'un faisceau de surface; le faisceau de surface, comme la projection d'une ponctuelle.

Il y a des formes d'espèces supérieures réunissant plusieurs formes de 1re espèce : tel le système plan, qui comprend le système de tous les points et de toutes les lignes d'un plan ; telle la gerbe de rayons, constituée par tous les plans et toutes les lignes d'un faisceau à 3 dimensions, etc.

Les relations métriques et les figures typiques qui leur correspondent apparaissent comme des situations remarquables où les combinaisons des formes élémentaires atteignent un caractère synthétique exceptionnel. Ces figures répondent généralement aux valeurs métriques singulières qui arrivent lorsque plusieurs paramètres deviennent égaux entre eux ou s'évanouissent dans les valeurs extrêmes : zéro ou l'infini. Toute valeur singu-

lière consiste ainsi dans l'évanouissement de quelque relation de quantité, et c'est là ce qui fait éclore une qualité nouvelle, objet de la Géométrie de Position. Il n'y a là qu'une application d'une loi métaphysique des plus essentielles : *La Quantité est la résistance de la matière à l'idée, et la Qualité est l'élimination de cette résistance et l'idéation de la matière.*

La Géométrie Analytique

Tandis que la Géométrie Projective tend à éliminer de plus en plus les relations métriques, la Géométrie Analytique tend, au contraire, à réduire toute donnée de situation en relation métrique. Or on parvient à exprimer par une équation toute donnée géométrique ; une même équation est susceptible de plusieurs traductions géométriques différentes, et de plus, les expressions analytiques présentent d'ordinaire un degré de généralité plus vaste que les données géométriques qu'elles traduisent. On est ainsi amené à concevoir notre espace représenté comme une modalité particulière entre bien d'autres également concevables. Alors, les propositions fondamentales indémontrées et tenues pour évidentes, qu'on nomme axiomes, apparaissent comme de simples hypothèses entre bien d'autres possibles qui engendreraient des géométries tout autres.

Ces constatations ont porté certains esprits à conclure que l'espace est une pure création de notre esprit, dont les lois dépendent uniquement des hypothèses arbitraires que nous choisissons pour base. La géométrie est alors considérée comme une simple « branche de la théo-

rie des nombres », et les éléments et opérations géométriques sont définis indépendamment de toute représentation, uniquement par des propositions analytiques dans lesquelles on remplace les noms des fonctions algorithmiques par ceux des objets géométriques. Les éléments géométriques ne différeraient ainsi des éléments analytiques que par les noms appliqués aux mêmes concepts.

Cette thèse contient deux conclusions qu'il faut nettement séparer : 1° la géométrie, construite par l'expérience et basée sur certaines données tenues pour évidentes, n'est pas la seule possible ; 2° toutes les géométries dépendent d'hypothèses tout-à fait arbitraires ; l'espace ne tient sa réalité que des créations de notre esprit ; il n'a d'autre existence que les relations purement formelles exprimées par l'analyse.

Nous allons essayer de montrer que la première de ces conclusions doit être admise, et la seconde rejetée.

Les données géométriques se décomposent toutes en quantité et qualité. La translation ou l'Etendue est l'élément quantitatif ; il est naturellement exprimable par des nombres. (Il s'agit du nombre pris dans toute sa généralité.) La Situation, élément qualitatif, se ramène à des combinaisons de directions, autrement dit à des assemblages d'angles. Or nous avons déjà vu que les directions sont exprimables par le rapport entre deux éléments de translation, déterminé par un 3e. Il s'ensuit que toute donnée géométrique est exprimable par une formule analytique, à la condition d'appliquer les divers éléments de ces formules à des directions convenues, et les opérations analytiques à des opérations géométriques.

Définitions analytiques des éléments

En géométrie analytique, on définit le point comme l'ensemble de n quantités dans un espace à n dimensions, quantités qui sont ses coordonnées. Cette définition exprime une propriété du point, mais n'explique pas sa notion. La notion du point consiste dans *l'individualité élémentaire, indivisible et indécomposable en fonction de l'espace;* le point est *l'élément inétendu, germe et évanouissement* de l'étendue. Le point n'a donc aucune forme spatiale, et ne peut être distingué en fonction de l'espace que par ses relations avec cet espace. Les coordonnées sont ces relations. Mais les coordonnées ne sont des lignes que si l'espace est considéré comme construit par des lignes, c'est-à-dire s'il est dimensionnel. Il résulte de là que la définition analytique du point n'est nullement une convention arbitraire, mais seulement la traduction en langage analytique d'une propriété qui découle de l'essence même du point, c'est-à-dire de l'individualité inétendue. Le point est, par rapport à l'espace, *l'individualité élémentaire sans quantité ni qualité propre et distincte seulement par les relations qu'elle pose dans un milieu.*

Si donc on fait abstraction de la forme et de la grandeur d'un élément géométrique quelconque pour ne considérer que sa situation, cet élément, quel qu'il soit, pourra être exprimé par un ensemble de coordonnées ; il sera alors assimilé à un point, non que la nature du point soit arbitraire, mais parce que le point est la réalisation géométrique de l'individualité élémentaire, distinguée uniquement par ses relations avec son milieu.

Cette abstraction de la forme et de la grandeur est particulièrement aisée quand il s'agit justement d'éléments simples tels que le plan sans contours ni limites. Mais ces substitutions ne sont pas de simples questions de mots, plan et point ne sont pas des synonymes. On ne crée pas les quantités géométriques en nommant *coordonnées* les variables, et *point* ou *plan* leur ensemble ; on se borne à constater une propriété commune à deux natures d'objets d'essences très distinctes ; on leur applique simplement un caractère métaphysique qui est exprimé d'une manière purement formelle et indépendamment de toute application à des objets par l'expression analytique.

Analytiquement, on appelle ligne l'expression d'un point variable dont les coordonnées sont fonction d'une seule quantité. Nous avons défini la ligne comme étant l'élément géométrique de translation, et la translation comme étant le changement de relations d'un sujet avec son milieu quand ce sujet fonctionne comme unité élémentaire et indivisible. L'essence de la ligne étant ainsi établie indépendamment de toute représentation, est applicable à toute espèce de géométrie ; on comprend alors pourquoi elle s'exprime analytiquement par les variations d'un point dépendant d'un seul paramètre, paramètre qui mesure la translation. Aucun repère n'existant en dehors de cette trajectoire, il est impossible de distinguer une ligne droite d'une courbe.

Dans la nouvelle géométrie analytique, on appelle surface la variété à $n - 1$ dimension, au sein d'un espace à n dimension. C'est ce que nous avons appelé jusqu'ici élément-enveloppe. Nous adopterons à l'avenir

la terminologie consacrée. La surface s'exprime naturellement par une fonction à n — 1 paramètres. Cela ne soulève aucune difficulté, car une variété d'un nombre de dimensions données doit évidemment être fonction de chacune d'elles.

Expressions analytiques des relations géométriques

Dans l'interprétation géométrique des formules, les variables représentent les grandeurs qui seront comptées suivant des directions convenues, et dont l'ensemble permet de définir sans ambiguïté un lieu quelconque de l'espace. Les autres quantités qui interviennent dans les équations sont nommées paramètres. Elles peuvent intervenir suivant les divers algorithmes.

Tout paramètre indépendant des variables ne peut exprimer qu'une grandeur, qu'on ne pourra représenter sans une convention préalable. Si le paramètre est une ligne, ce sera une translation ; si c'est un angle, ce sera une rotation. Mais ces déplacements ne changeront rien aux relations réciproques des variables ; ils transporteront en bloc leur système. Telle est la traduction de la sommation.

***

L'algorithme reproduction indique un rapport de direction avec les coordonnées. En effet, les deux formes de cet algorithme sont ax ou $\frac{m}{x}$

La forme ax exprime une modification quantitative de x. Or, si l'on fait tourner une ligne indéfinie autour

d'un point fixe, le segment intercepté sur elle par une transversale fixe varie avec l'angle, et ce segment variable est, pour chaque position, une projetante de la même projection x.

L'expression $\frac{m}{x}$ répond à la même relation, mais au lieu de caractériser le segment intercepté sur la projetante par la transversale fixe, elle indique le segment opéré sur cette transversale par la projetante. Dans le cas spécial où la transversale fixe est perpendiculaire à la direction initiale, le coefficient a de la 1re expression est le cosinus de l'angle qui sépare la projetante de sa projection, et le rapport $\frac{m}{x}$ de la 2e expression est la tangente trigonométrique du même angle.

Ce cas auquel répondent les fonctions trigonométriques n'est pas simplement un cas particulier, mais le cas typique élémentaire ; car, d'une part, l'angle droit est le fondement de la construction dimensionnelle et du maximum de contraste simultané ; et, d'autre part, les fonctions trigonométriques possèdent une origine algorithmique tirée du nombre e, et indépendante de leur application géométrique. L'angle de projection convenu est alors représenté par l'unité et disparaît des formules ; mais il faut toujours retenir que ce coefficient non exprimé existe. L'algorithme $\frac{m}{x}$ exprime la division de m en x parties ou l'évaluation de m quand x est pris pour unité ; il exprime donc encore une modification de x. Les expressions ax et $\frac{m}{x}$ seraient susceptibles, il est vrai, d'autres traductions géométriques ;

mais si l'on y regarde de près, on verra que le choix de l'angle de projection n'est arbitraire qu'en apparence. En effet, on pourrait prendre la longueur ax sur le même axe que la longucur x; mais cette réalisation serait purement numérique et non géométrique : les quantités a et x seraient des nombres de même nature, une simple application de nombres à une grandeur géométrique et qui pourrait être aussi bien d'une autre nature. A ce titre, rien ne différencierait l'opération ax de l'opération $x + b$, b étant convenablement choisi pour que $ax = x + b$. A l'opposé de cette interprétation, on pourrait considérer a et x comme deux grandeurs géométriques, et alors, sauf un coefficient angulaire qui, dans le cas d'une projection orthogonale, est égal à l'unité, le produit ax exprimerait un rectangle de côtés a et x.

Des interprétations de ce genre se rencontrent en géométrie; mais ici, elles seraient inadmissibles, car il s'agit de mesurer des angles par des lignes ; les deux facteurs a et x sont donc d'essence différente, a est un nombre, x est une longueur, et par conséquent, le produit ax ne crée pas de surface, mis modifie la longueur x (1). Cette modification ne pourrait se traduire par une translation que si l'on considérait a comme un facteur dynamique faisant croître ou diminuer x, comme un coefficient de dilatation, par exemple : mais ce serait introduire des données extragéométriques. La seule manière de modifier x géométriquement, non par une pure accession étrangère, mais par une influence à laquelle il participe,

(1) Si on ne veut pas considérer les coordonnées comme étant forcément des longueurs, le raisonnement n'en subsiste pas moins, le produit $a\ x$ ne doit pas créer une nouvelle essence géométrique sous peine de détruire l'élément qui sert de mesure.

c'est donc de le projeter. Et ainsi, l'on voit que l'interprétation de a comme coefficient angulaire est pour ainsi dire, nécessaire ; et, si l'on se donne l'illusion d'une convention arbitraire, le choix est en réalité prédéterminé par l'intuition inconsciente de cette nécessité.

On pourrait de même analyser l'expression $\frac{m}{x}$.

***

L'algorithme de la graduation, appliqué aux variables des équations, variables qui expriment les coordonnées, donne lieu à une certaine ambiguïté. Nous avons vu que, dans son essence, cet algorithme exprime un développement intensif. Ce développement n'est susceptible de traduction géométrique que médiatement, par une équivalence. La manifestation géométrique la plus voisine de l'essence de cet algorithme c'est évidemment le développement dimensionnel, x^2 répondant au carré, x^3 au cube, etc., construits sur le côté x. Nous nous sommes étendus précédemment sur ce sujet. Et c'est comme altération de cet algorithme de la graduation que les produits de la forme ax engendrent des rectangles de côtés a et x, etc.

En géométrie analytique, quand les coordonnées figure à diverses puissances, au carré par exemple, la relation constante des coefficients numériques qui relie les variables a lieu entre les carrés construits sur les coordonnées. Telle l'équation du cercle $x^2 + y^2 = R^2$. Mais la Géométrie Analytique est astreinte à se servir uniquement des coordonnées, et non des formes qu'elles sont susceptibles d'édifier dans des espaces de dimen-

sions supérieures : elle ne se sert de ces relations que pour en déduire celle qui existe entre les premières puissances des lignes ; elle ne retient pas les formes géométriques supérieures, mais seulement le nombre qui les exprime.

Si une relation constante a lieu vis-à-vis d'une certaine puissance des coordonnées, la relation correspondante entre les autres puissances des coordonnées, et notamment entre les coordonnées elles-mêmes, ne peut être constante, cela en vertu des lois algorithmiques. Or la relation constante entre les coordonnées exprime un angle constant de la projetante avec les axes ; la projetante est donc alors une ligne droite, et toute équation du 1er degré exprime une ligne droite.

Au contraire, quand l'angle varie, à mesure que les coordonnées croissent, la ligne projetante est nécessairement courbe. C'est donc nécessairement, et non en vertu d'une convention arbitraire, qu'une équation du 1er degré entre les coordonnées exprime une ligne droite.

Ce n'est pas l'équation du 1er degré qui définit la ligne droite. Elle n'en crée pas l'essence, mais se borne à être la traduction de cette essence par les relations qui en découlent. Nous avons défini les éléments rectilignes comme la réalisation de la translation pure, autrement dit de ces relations où le sujet varie comme élément indivisible, sans rapporter ses changements d'états à aucun repère extérieur. Ceci implique, pour tout translation pure, une orientation jugée invariable, autrement dit le caractère rectilinéaire. Cela s'applique à toutes les géométries possibles. Les expressions de la ligne droite ne diffèrent dans les diverses géométries que lorsqu'on veut les exprimer en fonction de la géomé-

trie euclidienne, géométrie qui suppose absolu le caractère exprimé comme relatif dans les autres géométries. Mais, si l'on tient chaque géométrie comme primordiale, l'expression sera toujours la même. Les coordonnées interviennent en effet toujours comme élément de translation pure, c'est-à-dire d'éléments dont la direction est tenue pour indépendante de tout lieu extérieur à leur propre tracé. Qu'il s'agisse de coordonnées curvilignes ou d'espaces non euclidiens, l'allure de ces lignes dépend d'un paramètre général une fois établi, qui fait partie intégrante de leur essence ; ces lignes sont ainsi toujours supposées de direction invariable et assimilables à des droites.

***

Les algorithmes transitifs appliqués aux variables, c'est-à-dire ceux où les variables figurent comme exposants, fonctions trigonométriques ou logarithmes, donnent lieu à des observations analogues à celles qui concernent la graduation. Au point de vue analytique, x^n indique que la coordonnée x a pour coefficient $(n - 1)$ quantités égales à elle-même et variant avec elle, ce qui entraîne un angle variable et une courbe. De même, log. x ou a^x ou *sin* x indiquent des modifications de la coordonnée qui dépendent de la valeur même de cette coordonnée, donc des courbures. Nous n'avons pas à distinguer ici les genres de courbes qui répondent à ces diverses fonctions. Il s'agit simplement de montrer que les traductions géométriques de ces algorithmes ne tiennent pas à des conventions arbitraires, mais découlent nécessairement

des propriétés communes aux essences géométiiques et aux essences analytiques.

Valeur des définitions analytiques

L'erreur de la thèse qui veut ramener la Géométrie à n'être qu'une branche de l'Analyse provient d'une confusion entre la représentation et le concept de l'Espace. Nous avons, dès le début de cet ouvrage, distingué ces deux composantes, et montré qu'il existe une notion d'espace qui répond aux conditions nécessaires de l'existence individuelle au sein de l'universel, et qu'il y a des caractères essentiels et nullement arbitraires impliqués par la notion d'espace. C'est l'Espace métaphysique que les expressions analytiques conservent seul, et dont elles donnent la traduction purement formelle, tandis que les diverses représentations donnent les applications plus ou moins particulières et diverses de cette essence. Quand les fonctions analytiques sont implicites, elles expriment que des individus (les variables) sont reliés par une certaine fonction non définie (le milieu), c'est là un caractère générique qui répond justement à l'essence de l'Espace.Mais, quand on donne à ces fonctions des formes explicites, c'est-à-dire quand on détèrmine les opérations algorithmiques qui les constituent et qu'on a trouvé en même temps des opérations géométriques susceptibles de leur correspondre, les formules peuvent s'adapter aux divers espaces représentés cela dans la mesure où peuvent s'établir ces correspondances. Là, il subsiste une part d'arbitraire entre divers modes d'associations possibles de l'Analyse à la Géométrie ; mais cet arbitraire est limité par les con-

ditions métaphysiques qui résultent de l'essence même de l'Espace.

Cette essence, les formules ne l'expriment que médiatement, comme un groupe de propriétés, cela parce qu'elles sont analytiques. Toute analyse, en effet, dissèque et laisse échapper le mode de liaison, le facteur synthétique qui est substance dans l'individuel, essence dans l'universel. Et comme l'école nominaliste ne procède que par analyse, elle méconnaît la réalité de ce facteur que l'analyse détruit, et elle le confond avec la représentation,qui est le symbole naturel,mais relatif à nous, par lequel les substances et les essences deviennent assimilables à notre intelligence.

Or,comme les formules ne retiennent que les propriétés sans saisir leur mode de liaison (1), elles acquièrent par ce fait un plus haut degré de généralisation et deviennent applicables à toutes les espèces géométriques douées des mêmes propriétés et qui diffèrent seulement par les modes de liaison (essence). Mais, soit dans leur acception particulière, soit dans leur acception générale, elles ne sont que des abstractions des objets géométriques, et c'est à tort qu'on les identifie avec eux et qu'on leur applique les mêmes noms. De plus, on ne devrait jamais, sous prétexte que la notion d'une espèce a conduit à celle d'un genre qui l'enveloppe, étendre le nom de l'espèce au genre tout entier. Cette double con-

---

(1) Par exemple l'expression du point ou du plan par un ensemble de 3 coordonnées dans l'espace à 3 dimensions n'indique nullement comment sont liées ces coordonnées pour réaliser soit un point, soit un plan.

fusion est la seule cause qui permet d'attribuer indifféremment à une même formule les noms de divers objets géométriques, comme le point ou le plan.

La Géométrie Analytique Générale fait donc abstraction non seulement de l'élément représentatif des objets géométriques, mais encore de leur élément synthétique, qui est leur essence, de celui qui géométrise un groupe de propriétés. L'élément représentatif est le symbole naturel de cette essence, symbole relatif à nos conditions de perception. A ces symboles naturels, la Géométrie Analytique substitue des symboles conventionnels exprimant isolément les propriétés en lesquelles elle dissocie l'essence. En s'affranchissant de la représentation, elle permet d'atteindre des applications de l'essence à des modes de représentation, étrangers au nôtre ; mais ces modes irreprésentables pour nous ne nous sont révélés que par voie d'analyse et exprimables par des symboles conventionnels. De là l'illusion d'une vertu créatrice attribuée à ces symboles.

Les définitions analytiques des dimensions et des déplacements, qui constituent l'effort suprême de réduire la Géométrie à l'Analyse, vont, je l'espère, nous permettre de mettre mieux en évidence les défauts de la thèse que nous combattons.

Définition analytique des Dimensions

On a voulu définir la notion de Dimension sans faire appel aux représentations géométriques, en s'appuyant uniquement sur des données analytiques. On s'appuie alors sur la conception purement analytique du continu.

Nous allons essayer de résumer l'exposé que M. Poincaré a fait de cette théorie (1).

On dit qu'un ensemble d'éléments C forme un continu d'un seul tenant entre A et B, lorsqu'on passe de A à B, ou réciproquement, par diverses suites d'éléments tels que chacun d'eux est indiscernable de ses voisins et discernable de ses non-voisins, les éléments A et B étant chacun indiscernables de leurs voisins qui appartiennent à la suite.

Si l'on extrait de l'une de ces suites un certain nombre d'éléments, leur système constituera ce qu'on appelle une *coupure*. Cette coupure peut être constituée soit par des éléments tous discernables entre eux (ensemble discontinu), soit par des éléments disposés comme dans l'ensemble C, et former aussi un ensemble continu.

D'autre part, certaines des suites établies dans l'ensemble C de manière à relier continûment A et B peuvent avoir un ou plusieurs de leurs éléments, qui seront indiscernables d'un ou de plusieurs éléments appartenant à la coupure. La coupure divisera ces suites. Au contraire, les suites dont les éléments sont discernables des éléments de la coupure ne seront pas divisés par elle.

Si le continu C peut être divisé par des coupures qui consistent en un système discontinu, il est dit à une dimension (en effet, des points isolés sur une ligne la divisent). Si, pour diviser le continu C, il faut une coupure qui soit elle-même un continu à une dimension, le continu C aura deux dimensions (en effet, une sur-

(1) *La valeur de la science*, par H. Poincaré.

face ne peut pas être divisée par un système de points isolés ; elle peut l'être par une ligne.) Et ainsi de suite. Le continu à n dimensions est celui qui est divisé par un continu à $n - 1$ dimensions. Le nombre de ces divisions superposées, réalisables sur un continu et ses coupures de différents ordres, coupures dont la dernière est un système discontinu, exprime le nombre des dimensions de ce continu.

Cette théorie aborde la notion de Dimension par un procédé diamétralement opposé à celui que nous avons employé. Partant d'une variété spatiale donnée, nous avons posé un élément spatial élémentaire (point) non compris dans la variété donnée, et par conséquent, contrastant avec cette variété tout entière, et reliable à cette variété par une continuité spatiale. Nous avons précisé davantage en schématisant la dimension par la direction de contraste maximum.

La théorie analytique prend pour point de départ le continu spatial dans lequel nous posons l'élément de contraste ; elle le divise par une variété spatiale de degré immédiatement inférieur. L'élément diviseur est la variété spatiale qui nous a servi de base. Le continu au sein duquel s'opère la division ou le contraste est le dividende. Quant au quotient, il est représenté, dans le cas du contraste, par la direction de contraste maximum, et, dans le cas de la division, par la donnée numérique de 1re dimension. Nous réalisons le contraste maximum n fois par rapport au système spatial obtenu par l'opération précédente ; la thèse analytique réalise n fois la division du continu restant dans la coupure précédente.

Ces deux théories cependant ne sont pas équivalentes.

La théorie analytique paraît plus générale. Eliminant toute notion de direction, elle aboutit à cette conséquence étrange de systèmes géométriques ayant un nombre de dimensions supérieur à celui de l'espace qui les contient. Ainsi, le groupe des déplacements dans l'espace à 3 dimensions est un continu à 6 dimensions. Or c'est là déformer plutôt que généraliser la notion de dimension. Dira-t-on que l'analyse rejette toute influence intuitive et crée ses notions d'une manière purement arbitraire : alors pourquoi donner à ces notions arbitraires le nom d'une notion intuitive qui contient des caractères étrangers, et souvent réfractaires à cette assimilation ?

Cette définition analytique des dimensions contient, comme l'autre, les facteurs constitutifs de la notion de Dimension : une continuité et un contraste ; mais elle n'indique pas leur fonction respective, et c'est cela qui entraîne la pseudo-généralisation que nous avons signalée.

Le continu y est défini analytiquement J'ai critiqué ailleurs (1) la thèse qui considère la notion de continu comme une pure dérivation de celle de nombre, et j'ai soutenu que la notion du continu est aussi primitive que celle de nombre, et que la Géométrie (dont cette notion est la base) n'est pas une simple branche de l'Analyse. On peut déduire au même titre, l'une de l'autre, les deux notions fondamentales de nombre et de continu, cela en les portant chacune à sa limite. Mais ce procédé

(1) V. *Les Principes des mathématiques de M. Coutural et la métaphysique*. Revue de Philosophie (mai-juin 1906).

transitif implique préalablement les deux notions qu'il relie : il ne peut être employé que comme instrument de mesure, d'analyse et de synthèse, de comparaison et d'assimilation, mais il ne peut fonder une notion ni donner sa définition essentielle.

Mais laissons cette critique. La définition analytique *ne révèle pas la fonction du milieu continu qui intervient dans la notion de Dimension* ; elle ne montre pas que, sans ce continu, l'élément de contraste serait saisi comme une différence de qualité par rapport à la variété spatiale donnée, et qu'il ne pourrait pas former avec elle un système spatial.

La définition analytique implique la fonction de contraste par le fait de la division accomplie dans le continu donné. Le fait de ne pouvoir diviser un continu spatial que par une variété de l'ordre immédiatement inférieur n'est que l'expression régressive de la construction dimensionnelle par les puissances d'un nombre, construction qui se rapporte, comme nous l'avons montré, à celle du contraste maximum. Mais cette fonction de contraste, essentielle à la notion de dimension, passe inaperçue dans la thèse analytique, et c'est son oubli qui permet ensuite la pseudo-généralisation par laquelle on confond la notion de dimension avec celle de paramètre.

La définition analytique des dimensions (comme la plupart des définitions d'éléments géométriques par l'analyse pure) ne saisit pas l'essence de son objet ; elle le distingue simplement par une propriété mise en évidence, grâce à un choix de conditions préalables, qui constituent l'objet même que l'on veut définir. Une généralisation véritable s'obtient en éliminant d'un concept les propriétés accidentelles pour ne conserver

que les caractères essentiels. Or, ici, on étend la notion primitive de dimension en conservant un caractère dérivé et en omettant l'essentiel : ce qu'on obtient, n'est pas la généralisation, mais l'altération d'un concept.

Les Déplacements

Parmi les paramètres, les uns déterminent les divers éléments de la figure entre eux, et indiquent sa construction ; les autres fixent la situation de la figure par rapport à certains lieux choisis comme repères. Ainsi, pour effectuer la construction la plus générale des figures homographiques dans l'espace à trois dimensions, on dispose de 15 coefficients, dont 9 déterminent la figure, les 6 autres fixant sa position. Dans l'espace à trois dimensions, une courbe exige 4 paramètres pour déterminer les grandeurs, 3 pour les situations; dans le plan, ces nombres sont réduits d'une unité.

On peut transformer les paramètres de situation en paramètres de construction ; il suffit de considérer comme une seule figure l'ensemble de la figure donnée et du lieu géométrique servant de repère. La transformation inverse est également possible : la figure donnée devient alors un système de situations répondant à une certaine loi, c'est-à-dire un lieu géométrique. Nous avons vu que ce double point de vue permet de considérer un même objet de connaissance, soit comme une espèce d'individus élémentaires distribués systématiquement, soit comme un individu synthétique et organisé.

Si certains paramètres de construction restent indéterminés, la relation géométrique n'individualise plus la

figure ; elle exprime alors une famille, une espèce de figures ayant toutes une propriété commune, avec des diversités de quantité qui entraînent des modifications du type.

Si l'indétermination porte, au contraire, sur les paramètres de situation seuls, la relation définit bien une figure individuelle, mais sans la localiser : elle permet les déplacements. La notion de Déplacement diffère de celle du Mouvement, en ce qu'elle n'implique ni le temps ni la force ; elle indique seulement une indétermination dans l'ensemble des relations d'un individu avec son milieu. La synthèse des déplacements compatibles avec la relation donnée constitue un lieu géométrique.

M. Laurent définit la géométrie « l'étude des Déplacements sans changement de forme ». Cette définition résume à merveille l'essence de l'espace ; car l'espace a justement pour nature de permettre des changements de relations entre certains groupes sans que les relations réciproques des éléments de chaque groupe entre eux soient modifiées, ce qui équivaut à la possibilité de coexistence d'une même forme dans plusieurs individus. L'expression analytique du déplacement que l'on donne pour sa définition conventionnelle n'est, comme on va le voir, que la traduction en termes analytiques de son caractère essentiel.

***

Si on transforme deux points, X et X' d'une même figure F au moyen d'une même fonction , la figure F formée par les deux points X et X' s'est déplacée sans changer de forme. Les formules analytiques décomposent cet énoncé en un groupe d'expressions et de fonctions distinctes

pour chaque coordonnée des points X et X', mais cela ne change rien à la proposition que nous venons de formuler. Donc, un déplacement sans changement de forme consiste dans une substitution de coordonnées, les fonctions dont ces coordonnées sont les variables demeurant les mêmes.

Cet exposé ne fait qu'exprimer, en termes d'analyse algorithmique, la distinction entre le sujet étendu et l'espace, qui est son milieu.

La formule du déplacement sans changement de forme indique que le point X est passé au point Y, et le point X' au point Y', en vertu de la même modification apportée à X et à Y. Donc, la relation primitive entre X et X' n'a pas changé et se retrouve entre Y et Y', c'est dire que le lieu des parties du sujet n'a pas été modifié, et que la figure conserve entre ses parties les mêmes relations : seules les relations de ces diverses parties avec le milieu extérieur sont changées.

La fonction φ pouvant être quelconque, il existe une infinité de déplacements sans changement de forme. Ce sont ces déplacements qui font l'objet de la géométrie ; et en effet, toute géométrie implique cette fixité des liaisons entre divers éléments possibles quand les relations avec le milieu varient, autrement dit, la géométrie implique la notion de l'autonomie individuelle.

On dit quelquefois que la géométrie a pour hypothèse fondamentale la possibilité de déplacer une figure sans la déformer. Cette donnée est sans doute une hypothèse, si l'on envisage les objets sensibles et matériels, et alors une hypothèse probablement fausse. Mais ce n'est plus là une hypothèse si l'on considère l'espace métaphysique ; c'est alors une propriété qui découle de l'essence même

de l'espace, puisque l'espace permet la coexistence de plusieurs individus de même forme, ce qui implique que leurs situations respectives ne les modifie pas.

*
* *

En géométrie euclidienne (1), les fonctions caractérisant le Déplacement forment un système de n équations du 1er degré entre les n coordonnées d'un point x, chaque équation définissant une coordonnée du point y. Chaque équation contient un terme constant de la forme α_i, qui exprime les translations pures sur chaque axe. Les autres termes sont de la forme $a_{ij}\ x_i$, et constituent une substitution homogène et orthogonale. On définit algébriquement une substitution orthogonale par ces deux conditions : 1° la somme des carrés des coefficients de chaque équation est égale à l'unité $\sum a_i^2 = 1$; 2° la somme des moyennes géométriques entre les coefficients des mêmes variables dans deux quelconques des équations, est nulle $\sum a_i\ a_j = 0$. Et cela entraîne que le déterminant des $a_{ij} = \pm 1$. C'est là exprimer, sous une autre forme, trois formules de trigonométrie sphérique qui expriment la rotation pure, c'est-à-dire la rotation avec centre fixe et secteur constant.

Ces formules expriment donc, par les α, la translation pure, et par les termes en $a_i\ x_i$, la rotation pure : elles traduisent ainsi les deux mouvements qui déplacent une figure sans l'altérer, et, par conséquent, sans modifier les

---

(1) Voir : *La Géométrie Analytique Générale* par L. Laurent.

distances entre ses points, ni les angles entre ses lignes. Ce sont là les deux invariants de la géométrie euclidienne, qui se déduisent algébriquement des formules du Déplacement. Mais ces relations algébriques ne définissent pas pour cela l'essence de la Distance ni celle de l'Angle ; elles en révèlent seulement la condition analytique équivalente, condition qui est une conséquence et non un principe des notions d'Angle et de Distance. La Distance et l'Angle sont des données élémentaires et fondamentales en géométrie, et nous les avons définis, en fonction de l'individu comme les intensités de résistance existant entre deux états de translation (distance) et de rotation (angle).

Or la formule euclidienne de la distance entre deux points, X et X' est $+\sqrt{(x_, - x'_,)^2 + \ldots + (x_n - x'_n)^2}$ qui n'est autre que la traduction de la propriété $\sum a^2 = 1$. On voit par quel moyen détourné est exprimée cette donnée géométrique si simple, cette intensité de translation. Et cette formule implique, par ses éléments mêmes, la notion de distance qu'elle prétend définir. Que sont, en effet, les $x_, \ldots x_n$, les $x'_, \ldots x'_n$, sinon les distances à l'origine des points où X et X' se projettent sur chaque axe ? Que sont les différences $(x_, - x')$ .. $(x_n - x'_n)$ sinon des différences entre ces distances à l'origine ? La somme de ces carrés exprime l'hypoténuse commune à $(n-1)$ triangles rectangles ; elle montre simplement comment on obtient la distance d'un point non situé sur les axes quand on ne peut mesurer directement des distances que sur les axes. Mais ce n'est pas là une définition de la Distance.

La formule euclidienne de l'angle Θ entre deux droites est $\cos \varphi_1 \cos'_1 \varphi + \cos \varphi_2 \cos \varphi'_2 + \ldots + \cos \varphi_n \cos \varphi'_n$, les $(\varphi_, \ldots \varphi_n$

et les $\varphi', \ldots \varphi_n$) exprimant les angles que font respectivement chacune des droites D et D' avec les n axes. C'est là la traduction de la propriété $\sum a_i a_j = 0$. Ici, comme pour la distance, on mesure un angle au moyen de plusieurs autres, et la notion d'angle se trouve impliquée dans la formule qu'on veut donner comme sa définition.

*
* *

Les définitions du déplacement sans changement de forme et des invariants, dans les géométries non euclidienne, ne devraient pas différer des précédentes, si l'on considérait chacune de ces géométries en elle-même sans la comparer à la nôtre. Mais, par le seul fait qu'on distingue ces diverses géométries, c'est en la comparant à la géométrie perçue comme l'expression directe des notions spatiales. C'est seulement à ce titre que se justifie les différences de formules et de définition des données géométriques. Alors, comme il s'agit de nous faire comprendre quelque chose d'irréprésentable, ces formules analytiques sont les seules définitions possibles. Cela posé, nous nous bornerons à signaler les invariants de la géométrie sphérique et de la géométrie hyperbolique.

Dans la géométrie de la sphère (Riemann), on a deux invariants : une hypersphère de rayon donné

$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = R^2$

et le carré de la distance entre deux points, soit

$(x_1 - x'_1)^2 + (x_2 - x'_2)^2 + (x_3 - x'_3)^2 + (x_4 - x'_4)^2$

ou, ce qui est équivalent,

$x_1 x'_1 + x_2 x'_2 + x_3 x'_3 + x_4 x'_4$

C'est dire qu'on considère une figure comme non altérée, quand les deux points se déplacent en restant

sur l'enveloppe de l'hypersphère donnée, et que leur rapport d'inversion, vis-à-vis du point origine, reste constant.

On passe à la géométrie hyperbolique en rendant négative l'une des coordonnées de l'hypersphère et en remplaçant dans les diverses formules les sinus et cosinus circulaires par les sinus et cosinus hyperboliques. Le déplacement sans changement de forme a pour formule celle de la géométrie euclidienne, sauf qu'il n'y a pas de termes constants. La substitution est donc linéaire comme dans la géométrie euclidienne, et homogène comme dans la géométrie sphérique.

*
* *

L'espèce de géométrie (euclidienne, non euclidienne, ou quelconque) est ainsi déterminée par la définition que l'on donne du déplacement sans changement de forme. Il en résulte que les qualifications de droite, de plan et d'élément rectilinéaire peuvent être attribuées à des objets répondant aux représentations les plus diverses.

Mais il ne faut pas conclure de là, comme le font certains auteurs, que l'espace n'a d'autre réalité que celle définie par nos hypothèses arbitraires. En effet, par le seul fait que nous supposons le déplacement sans changement de forme susceptible d'être défini de plusieurs manières, nous supposons l'existence nécessaire d'un caractère commun, impliqué dans toutes ces définitions, sans quoi il serait impossible d'attribuer le même rôle à ces diverses conditions. Il existe donc, indépendamment des diverses représentations auxquelles on peut appliquer arbitrairement le caractère de déplacement

sans changement de forme, quelque chose qui tient à l'essence de cette notion, et qui s'impose nécessairement à toute conception d'espace. Voici en quoi consiste ce concept, qui n'a rien d'arbitraire.

Une figure représente une portion d'espace individualisée en un sujet. Tout changement dans les relations spatiales qui est considéré comme n'altérant pas les relations des parties du sujet entre elles, mais seulement celles du sujet avec des portions d'espace qui lui sont étrangères, est un déplacement sans changement de forme. Voilà l'élément qui tient à l'essence même de tout espace.

Ce qu'il y a d'arbitraire, c'est la désignation des changements que l'on considère comme n'altérant pas les relations des parties du sujet entre elles. On peut évidemment faire abstraction de telles modifications de forme que l'on veut et les tenir pour nulle. La géométrie euclidienne correspond au cas où les changements de forme dont on fait abstraction sont justement ceux qui échappent à notre représentation. Dans les autres géométries, au contraire, nous sommes obligés de tenir pour nuls, par convention, des changements de forme qui sont saisis par notre représentation. Donc, pour déterminer ces changements, qui doivent être tenus pour nuls et auxquels tous les autres seront rapportés, il est nécessaire d'exprimer préalablement ces changements assimilés à une fixité, en fonction de ce qui est la fixité pour notre représentation ; c'est là déterminer le paramètre d'un espace et son invariant. Et, si ce qui nous apparaît comme fixe est changeant, ce changement n'est intelligible et définissable qu'en fonction d'une autre fixité. Les fixités peuvent être relatives à tel ou tel

groupe de changements ; mais sans une fixité relative, les changements ne se passent plus dans un Kosmos ni objectif ni subjectif : ils ne sont plus que l'agitation inintelligible d'un chaos, ce qui n'implique plus alors l'existence d'un espace.

La fixité impliquée par tout changement intelligible et définissable doit demeurer distincte de ce changement. La coexistence possible d'une fixité avec des changements est justement ce qui constitue l'Espace. Cet espace peut être purement subjectif si la coexistence du fixe et du changeant ne s'accomplit que dans la mémoire d'un sujet; il est objectif si cette coexistence s'accomplit dans le Kosmos. L'Espace véritable sera donc celui auquel tous les invariants conventionnels sont rapportés, parce qu'il est conçu comme un invariant nécessaire.

Relativité de l'Etendue

L'invariant d'un espace définit la fixité inhérente à la qualité de l'Espace, à sa Situation; et cette fixité, nous venons de le voir, peut être relative à un groupe de relations données. Mais l'Espace doit posséder aussi une fixité inhérente à sa quantité, à son Etendue. Elle est fournie 1° par un élément d'étendue nulle : le point, 2° par un autre d'étendue infinie : point droite, plan, etc. de l'infini. Cette fixité est relative aussi, comme le montre la notion de contact. La tangente à une ligne correspond au contact de 1er ordre. C'est la communauté de direction réduite au point de contact seul; mais l'impulsion des deux éléments en contact diffère aussitôt : c'est ce qu'exprime la différence des dérivées.

Lorsque les dérivées premières coïncident, comme les fonctions primitives, au point de contact, cela indique qu'au point où le contact s'accomplit, les deux lignes tendent encore à conserver une même direction, de telle sorte que : si l'élément inétendu de l'espace considéré (qui répond aux infiniment petits dont le rapport est exprimé par la dérivée) acquérait une certaine grandeur, les deux lignes demeureraient confondues dans l'intervalle occupé par cette grandeur. Cette grandeur est, à son tour, susceptible d'une nouvelle dérivée, et ainsi, par rapport à la ligne originaire, cette dérivée de sa dérivée sera une dérivée de second ordre. Ainsi on obtient des contacts de plus en plus intimes. Chaque dérivation correspond à douer d'une grandeur infinie les grandeurs finies de l'espace précédemment considéré, et à donner l'expansion spatiale aux éléments inétendus de cet espace. On peut réitérer ce processus tant que la virtualité d'expansion possédée par les éléments inétendus n'est pas épuisée. Tantôt cette expansion n'est renouvelable qu'un nombre fini de fois ; tantôt l'opération peut s'accomplir indéfiniment ou présente des formes périodiques, etc. L'étude de tous ces cas sera faite dans un autre ouvrage. Ici, nous nous bornons à en retenir que l'étendue de l'espace est relative, non de la simple relativité inhérente à toute grandeur dont l'évaluation dépend du degré de son échelle adopté comme unité, mais d'une relativité qui transporte l'échelle entière des quantités d'un domaine à un autre, suivant une hiérarchie qualitative. Au sein de cette hiérarchie, la Grandeur (et plus généralement la Quantité) constitue un état de transition par lequel passent les objets, et qui est limité d'un côté par l'existence

abstraite et élémentaire, et de l'autre côté, par l'existence concrète et unverselle.

Ainsi, l'Espace apparaît comme relatif, et quant à son Etendue et quant à sa Situation. La relativité de situation est ce qui distingue les géométries euclidienne non euclidiennes ou quelconques. La relativité d'étendue est ce qui distingue la géométrie infinitésimale de la géométrie des grandeurs finies,

Ainsi l'Espace est empreint d'une relativité qui tient aux modes d'étendue et de situation qu'on lui attribue. Mais par le fait que la non-exclusion d'une puralité d'individus de même forme se traduit, en qualité et quantité, par l'existence de certaines possibilités de situation et d'étendue, il *existe* un espace relatif aux divers genres de situations et d'étendues, mais *réel*, en ce qu'il consiste dans la *nécessité* des rapports de situations et d'étendues (quel que soit leur genre).

CHAPITRE V

Nature de l'Espace

La réalité de l'Espace peut-être subjective ou objective suivant que la nécessité des rapports de situation et d'étendue affecte seulement notre manière de connaître, ou effectivement, la coexistence des objets eux-mêmes. Relativité et subjectivité ne doivent pas être confondues. La subjectivité est la relativité spéciale qui existe en fonction du sujet seul. Mais il y a des relativités qui peuvent concerner des rapports entre choses étrangères à nos représentations. La relativité peut donc être une réalité et une réalité objective.

La doctrine kantienne, qui fait de l'espace une des formes essentielles de l'entendement, s'éloigne du nominalisme, car elle reconnaît que l'espace n'est pas une création de l'esprit pour classer ses concepts, mais, au contraire, une condition fondamentale à l'élaboration des concepts. C'est donc un universel pour notre entendement.

L'espace possède alors une réalité au moins du même ordre que celle de l'entendement. Mais cette réalité est-elle bornée par cette fonction de l'espace vis-à-vis de l'entendement ? Il n'y a aucune raison pour que la réalité des lois soit moins objective que celle des choses. Si la résistance opposée par les choses nous convainc qu'elles

ne sont pas de simples représentations, mais des réalités indépendantes (au moins en partie), la résistance opposée par les lois et l'efficacité de leur application par nous doit nous convaincre au même titre de leur objectivité.

***

L'Espace apparaît comme un ensemble de relations basées, non sur les caractères propres aux individus, mais au contraire, apportant des rapports de liaison et de distinction qui leur manquent, pour permettre de les réunir sans les confondre, en un mot de les synthétiser. On ne peut donc pas refuser à l'Espace une existence propre, et le considérer simplement comme la collectivité intellectuelle que nous faisons d'un certain groupe de relations dont les individus seuls seraient la source. Dans toute relation, le lien ne possède pas une existence purement dépendante des termes, et les termes ne doivent pas non plus leur existence à la relation seule, mais ces termes et liens, en se déterminant réciproquement, passent d'un mode d'existence plus abstrait, plus virtuel, à un mode d'existence plus concret, plus réel. Ainsi, l'Espace et les individus, considérés isolément, ne sont que des virtualités par rapport au degré de réalité qu'ils acquièrent en se déterminant réciproquement. L'Espace n'est un être pleinement existant qu'en fonction des individus entre lesquels il établit des relations ; mais, d'autre part, les individus ne sont pleinement réalisés comme tels que grâce aux conditions spatiales, sans lesquelles leur compétition à l'existence les exclurait les uns des autres, et sans les-

quelles la distinction des formes qui les caractérisent ne pourrait s'accomplir entre eux.

Si donc l'existence de l'Espace est relative, celle des individus ne l'est pas moins ; cette relativité est, de part et d'autre, une dépendance réciproque. C'est une dépendance partielle qui achève l'éclosion de l'Espace et des individus, mais qui n'absorbe pas les principes de leur être. Les individus ont leur principe dans l'Individualité, c'est-à-dire *la manifestation de l'être, arrivant à la réalité et à l'unité par limitation, restriction, exclusion.* L'espace, au contraire, a son principe dans l'Universalité, c'est-à-dire *la manifestation de l'être arrivant à la réalité et à la totalité, par expansion, accession, intégration.*

***

Le nominalisme qui refuse à l'Universel l'existence confond la notion de Réalité et celle d'Individualité. Il provient d'une tendance psychique vers les buts particuliers, tendance qui fait éprouver vivement la résistance des choses et ne donne qu'une vague conscience de la résistance des lois. Cette résistance, au contraire, apparaît aux esprits qui sont orientés vers les buts généraux.

La résistance des choses concerne une variété d'actes les plus divers appliqués à une direction unique : c'est cette synthèse de résistance dont l'unité se manifeste comme un obstacle localisé qui nous convainc de l'effectivité d'une chose. La résistance des lois concerne un mode unique d'action avec les applications les plus variées : c'est cette synthèse de résistance dont l'unité se manifeste comme une manière d'être, qui nous con-

vainc de la nécessité d'une loi, Effectivité et nécessité sont deux modes différents d'existence, mais tout aussi réels, tout aussi indépendants de nos opérations propres.

Les lois ont donc le mode d'existence propre à l'Universel. Il ne s'ensuit pas pour cela que leur empire soit illimité. L'Universalité peut ne concerner qu'un certain ensemble et avoir des bornes, et il est fort à penser que les lois jugées par nous comme les plus nécessaires sont contingentes par rapport à une sphère plus vaste d'activité et de pensée, et qu'ainsi toute nécessité est l'œuvre d'une liberté supérieure.

Les lois ne sont pas pour cela arbitraires et conventionnelles, mais un universel est un système de conditions fixes et d'actes permanents accomplis dans une sphère déterminée et limitant l'arbitraire des relations réalisables dans cette sphère. Si l'on parvient à sortir de cette sphère, l'universel cesse d'être tel et ne devient qu'une loi contingente, arbitraire, condition qui apparaît comme volition d'un être supérieur.

Par rapport aux individus plongés dans une sphère d'existence donnée, la loi qui régit cette sphère devient un universel. S'imposant sans exception à tout le réalisable, l'universel apparaît, vis-à-vis des individualités qu'il régit, comme un infini relatif à une certaine qualité. Et, comme il nous est impossible d'embrasser le domaine de cet universel, son infinité relative ne peut être synthétisée par nous que d'une manière symbolique, sous forme de concept, ou comme l'énoncé d'une loi. Alors, nous sommes tentés de croire que l'universel est une simple création de notre esprit, parce que nous prenons le symbole condensateur et approprié à notre intelligence pour l'être même dont il est le signe.

Vu de plus haut, l'universel apparaîtrait comme un acte synthétique, peut-être même comme un être individuel, mais d'une individualité plus concrète, vis-à-vis de laquelle ce que nous considérons comme des réalités individuelles ne seraient que des abstractions, des infiniment petits. La géométrie ne manque pas de nous représenter cette loi, les points étant des individus entre eux, mais devenant, des abstractions, de simples accidents, de simples intersections par rapport aux lignes: celles-ci quoique limitées, sont capables d'une infinité de points, et cela de différentes façons. Et les lignes placées entre les points et les surfaces ont la même pluralité d'aspect. Il en est de même des surfaces, des volumes, etc.

Ainsi, un universel qui pour nous ne vise en général qu'une qualité abstraite, mais s'étend à toutes les manifestations de cette qualité par les individus, peut être considéré comme une fonction organique d'un individu d'ordre supérieur, les individus d'ordre inférieur n'étant plus que les chocs ou les combinaisons particulières que produisent les diverses fonctions de cet individu supérieur. Les Génies planétaires et les Dieux de la mythologie ne seraient pas alors de simples représentations symboliques d'idées abstraites, mais de véritables personnes douées d'une existence plus réelle et plus concrète que les individualités de notre monde, et dont l'essence propre serait un de ces verbes qui devient, par rapport à nous, loi universelle.

***

La Géométrie et les Mathématiques en général attestent d'une façon frappante cette relativité hiérarchique de l'Universel. Les exceptions qui affectent les lois, et qui disparaissent quand on généralise les formules, et qui se multiplient quand on les particularise, montrent clairement que les milieux considérés ne sont pas isolés et asservis entièrement aux lois universelles qui les régissent, mais qu'il existe des portes ouvertes sur des horizons plus vastes et que, par certaines conditions, on peut franchir l'enceinte établie par la loi.

Ainsi, les géométries non euclidiennes ont généralisé les relations spatiales concevables. Elles n'apportent aucune contradiction, si l'on prend soin de bien déterminer la signification de leurs concepts ; elles répondent à divers milieux, tous espèces d'un genre plus vaste.

La Géométrie Descriptive et la Géométrie Projective envisagent à deux points de vue différents les mêmes relations. La première dit que deux droites d'un plan se rencontrent, excepté le cas de parallélisme ; la seconde considère le parallélisme comme réalisant l'intersection à l'infini, et elle fait disparaître ainsi l'exception à la loi. Dans le premier cas, l'exception représente les cas par lesquels le milieu se soustrait à l'empire de la loi universelle ; dans le deuxième , on envisage un milieu plus vaste, et les mêmes cas deviennent une simple variété d'application de la même loi. Considérer une droite comme limitée à ses deux extrémités par un seul et même point situé à l'infini, c'est l'assimiler à une circonférence dont on n'étudie en général que des arcs infiniment petits qu'on peut confondre avec leurs cordes (puisqu'un infiniment petit n'a pas de grandeur finie et n'est caractérisé que par la direction en un point,

direction commune alors à la courbe et à la tangente). Cela n'entraîne nullement cette proposition contradictoire que la droite et la courbe, autrement dit l'unité et la multiplicité de direction, soient une même chose susceptible de plusieurs noms. On montre seulement qu'un même objet se définit par une relation différente, suivant qu'on le rapporte à un milieu plus synthétique ou à un milieu plus élémentaire. Ce qui était une invariance par rapport à un certain groupe devient variation par rapport à un groupe plus complexe.

De même, quand on parle de points imaginaires, on fait appel à un milieu plus vaste, le milieu primitif étant d'une extension inférieure à la loi qui s'y manifeste, et cela n'entraîne nullement la proposition contradictoire de points concevables, mais dont l'existence est impossible.

Inversement, les géométries discontinues et les fonctions en nombres entiers représentent des lois moins étendues que le milieu auquel on les applique.

***

La multiplicité des géométries possibles montre que l'Espace est un universel d'une plus grande généralité que celle conçue d'après nos données expérimentales ; mais l'arbitraire des définitions qui servent de base à une géométrie est plus apparente que réelle ; leur diversité répond plutôt aux milieux plus ou moins restreints que l'on prend pour point de départ, elle qu'elle n'est pas livrée au caprice de notre esprit.

Toute Géométrie a pour fondement des individualités et un élément de liaison qu'on peut considérer comme leur relation. Prendre pour individualité des points, c'est reporter sur la relation tous les caractères distinctifs ; prendre pour termes des figures, c'est intégrer dans les individus un certain nombre de ces caractères, et simplifier d'autant la relation.

Cette relation n'est pas quelconque ; elle implique coexistence des individualités et séparation des formes, qui ne peuvent s'accumuler en un même individu sans se confondre. Tel est le caractère essentiel qui nous a servi à définir l'Espace, et sans lequel il n'existe pas de géométrie.

***

On est donc amené à reconnaître que l'espace existe, non seulement en fonction de l'entendement, mais, au même titre en fonction des individus auxquels l'entendement reconnaît une existence objective. L'existence de l'espace est empreinte d'une certaine relativité, car elle n'est pleinement accomplie (comme toute existence non absolue) que par les relations qui la manifestent. Mais cette relativité est partagée par les individus eux-mêmes, qui ne sont complètement déterminés dans leur mode d'existence que par l'Espace. Ils ne sont pas cependant entièrement plongés dans l'espace, et l'espace n'existe que par rapport aux caractères qui persistent dans leur individualité ; il s'évanouit par rapport à ceux qui s'unifient dans la vie.

Mais la réalité de l'espace n'est pas bornée par ses relations existantes vis-à-vis des individus et des concepts réalisés ; aussi bien dans l'objectif que dans

le subjectif, l'espace est le champ d'une infinité de relations possibles entre individus et concepts possibles, et cela, non d'une manière indifférente, mais en imposant certaines lois et certaines conséquences. Par là s'affirme une indépendance partielle de l'espace vis-à-vis des individus et vis-à-vis des concepts. Il a une essence propre, que la présence des individus actualise de plus en plus.

La réalité de l'Espace participe donc de deux sources opposées. Il n'est ni une chose ni un principe, mais un véhicule des principes pour les adapter aux choses. C'est un agent intermédiaire. Ce que l'Espace possède d'indépendant et de préexistant pour ainsi dire à son contenu, provient du pôle universel de la réalité, pôle opposé à celui de l'individualité.

***

L'Universel et l'Individuel sont, nous l'avons vu, relatifs à certains ordres d'existence considérés ; ce ne sont pas des êtres, mais des fonctions de l'être ; ce sont les deux fonctions dérivées immédiates de la Réalité primordiale élémentaire. Ces fonctions n'existent que l'une en fonction de l'autre ; elles sont la pleine manifestation des deux faces de la relation constitutive de toute réalité élémentaire et dont l'aspect analytique consiste dans les principes d'identité et de contradiction. Ces deux principes s'affirment dans leur opposition suprême par les deux pôles de l'Universel et de l'Individuel, et ces dérivés immédiats de la Réalité appellent immédiatement deux éléments transitifs, qui sont le Temps et l'Espace et qui manifestent les deux mode

opposés de combinaison de ces principes d'identité et de contradiction en fonction de l'Individuel et de l'Universel ; l'Espace universalisant les individus et individualisant les formes, tandis que le Temps opère la relation inverse.

Espace et Temps sont ainsi le champ où s'opère la pénétration de l'Individuel et de l'Universel, sorte de matrice en gestation, où la collectivité des individus et la diversité des formes élaborent la synthèse vivante et construisent l'organisme du Kosmos.

Caen. — Imp. Ch. VALIN, 13, rue Écuyère.